2012. március 9.

Leíró halmazelmélet

4. feladatsor

1. Lengyel tér-e?

   a) $[a, b]$-n folytonos függvények tere a sup metrikával,

   b) $[a, b]$-n korlátos függvények tere a sup metrikával,

   (HF) c) l_p

   d) $L_p(\mathbb{R})$

2. Bizonyítsuk be, hogy lengyel tér tetszőleges Baire tulajdonságú részhalmazához van pontosan egy reguláris nyílt halmaz (azaz olyan halmaz, amely megegyezik a lezártjának a belsejével), melytől első kategóriájú halmazban tér el!

3. Bizonyítsuk be a topologikus 0-1 törvényt: ha $H \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$ olyan Baire tulajdonságú halmaz, amelyre bármely két véges sok helyen eltérő $[0, 1]$-beli sorozat közül vagy egyik sincs H-ban, vagy mindkettő H-ban van, akkor H első kategóriájú vagy reziduális!

4. Adjunk meg folytonos $[0, 1] \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ráképezést!

5. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ homeomorfak!

6. (HF) a) Igaz-e, hogy tipikus $[0, 1]$-n folytonos függvény majdnem mindenütt injektív abban az értelemben, hogy van olyan $N \subset [0, 1]$ nullmértékű halmaz, amelyre tipikus $[0, 1]$-n folytonos függvény injektív $[0, 1] \setminus N$-en?

   b) Milyen n-re igaz, hogy tipikus folytonos $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$ függvény injektív?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy (X, d) szeparábilis metrikus tér minden d-vel ekvivalens metrikával teljes, akkor (X, d) kompakt!

A teljesség kedvéért a március 5.-i előadáson föladott feladat:

8. Bizonyítsuk be, hogy a

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, d_n(x_n, y_n))}{2^n}$$

   szorzatmetrika a szorzattopolológiát adja!