2012. március 2.

Leíró halmazelmélet

3. feladatsor

1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Melyikből állításból következik a másik?

   (i) E Baire-tulajdonságú.

   (ii) E Lebesgue-mérhető.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha A második kategóriájú Baire-tulajdonságú részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, akkor az
$$A - A = \{x - y : x, y \in A\}$$
halmaz tartalmaz origó középpontú gömböt!

3. (HF) Igaz-e, hogy egy tipikus $[0, 1]$-n folytonos függvény injektív a Cantor-halmazon?

4. (HF) Mely jólrendezett halmazok ágyazhatóak be a számegyenesbe?

A teljesség kedvéért a február 27.-i előadáson föladott feladatok:

5. (Luzin tétel duálisa) Tegyük fel, hogy X és Y topologikus terek, Y M_2, $f : X \to Y$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbiak ekvivalensek:

   (i) f Baire-mérhető.

   (ii) Van olyan A reziduális halmaz, amelyre $f|A$ folytonos.

6. *a) Mutassunk olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ függvényt, melynek grafikonja második kategóriájú, illetve pozitív külső mértékű! (Ez két feladat.)

   b) Lehet-e reziduális illetve teljes mértékű a grafikon?