2012. május 4.

Leíró halmazelmélet

10. feladatsor

1. Legyen $A \subset [0,1]$ adott halmaz. Két játékos a következő végtelen játékot játsza: egy $[0,1]$-beli számot állítanak elő kettes számrendszerben úgy, hogy felváltva mondanak számjegyeket, de az I. játékos mindig annyi számjegyet mond amennyit akar (persze csak véges sokat), a II. játékos viszont mindig csak egy számjegyet mondhat. Az I. játékos kezd. Ha az így kijött szám A-ban van, akkor az I. játékos nyer, különben a II.

   a) Bizonyítsuk be, hogy az I. játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha az A halmaz tartalmaz Cantor halmazzal homeomorf halmazt!

   b) Bizonyítsuk be, hogy a II. játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha az A halmaz megszámlálható!

2. Legyen $B \subset [0,1] \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, legyen A a B halmaz vetülete $[0,1]$-re. Az előző játékot úgy módosítjuk, hogy az I. játékos a számjegyek mellett minden lépésben mond egy pozitív egész számot is, és pontosan akkor nyer, ha $(x,(n_1,n_2,\ldots)) \in B$, ahol x a közösen előállított szám, $(n_1,n_2,\ldots)$ pedig az I. játékos által mondott pozitív egészek sorozata.

   a) Bizonyítsuk be, hogy ha az I. játékosnak van nyerő stratégiája, akkor az A halmaz tartalmaz Cantor halmazzal homeomorf halmazt!

   b) Bizonyítsuk be, hogy ha a II. játékosnak van nyerő stratégiája, akkor az A halmaz megszámlálható!

   c) Döntsük el, hogy igazak-e a fenti állítások megfordításai!

A teljesség kedvéért az április 27.-i előadáson föladott feladat:

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy végtelen játékban az I. játékosnak van nyerő stratégiája, akkor a nyerő halmaza tartalmaz perfekt halmazt!

4. Bizonyítsuk be, hogy van nem eldöntött végtelen játék (azaz olyan, amelyben egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája)!