2012. február 17.

Leíró halmazelmélet

1. feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy egy metrikus tér pontosan akkor teljes, ha zárt halmazok egymásba skatulyázott, nullához tartó átmérőjű sorozatának mindig nemüres a metszete!

   (Emlékeztető: egy metrikus tér teljes, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.)

2. Bizonyítsuk be, hogy minden

   a) teljes metrikus tér

   b) lokálisan kompakt Hausdorff-tér

   Baire-tér!

3. Álljon X azon ω_1 hosszúságú sorozatokból, melyekben minden tag 0, 1 vagy -1 és csak megszámlálhatóan sok ± 1-es szerepel. Vegyük X-en a lexikografikus rendezést.

   a) Határozzuk meg X számosságát!

   b) Bizonyítsuk be, hogy X minden ω_1 számosságú rendezett halmazhoz tartalmaz vele izomorfat!

   c) Mutassuk meg, hogy (CH)-ból következik univerzális kontinuum számosságú rendezett halmaz létezése!

Definíció. Egy $(X, <)$ rendezett halmaz *teljes*, ha benne minden nemüres, felülről korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

4. Az alábbiak közül mely állítás(ok) ekvivalens(ek) az $(X, <)$ rendezett halmaz teljességével?

   a) Minden nemüres, alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja.

   b) Minden konvex halmaz X, $\emptyset$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞) vagy $[a, \infty)$ alakú.

   c) Korlátos zárt intervallumok egymásba skatulyázott sorozatának metszete mindig nemüres.

   d) Minden korlátos (rendezéstopológia szerint) zárt halmaz kompakt.

5. (HF) Egy megszámlálható rendezett halmaz legfeljebb hány intervallumot tartalmazhat?

A teljesség kedvéért a február 15.-i előadáson föladott feladatok:

6. Igaz-e, hogy minden szeparábilis rendezett halmaz izomorf $\mathbb{R}$ egy részhalmazával?

7. Egy X rendezett halmaz Y részhalmazán kétféleképpen is definiálhatunk topológiát: egyrészt tekinthetjük Y-t mint az X topologikus tér alterét, másrészt tekinthetjük Y-t mint rendezett halmazt és vehetjük rajta a rendezéstopológiát. Mutassuk meg, hogy ez a két definíció nem mindig egyezik meg!

8. (*) (Sierpiński dualitás) Bizonyítsuk be, hogy (CH) esetén van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekció, amelyre $f(E)$ pontosan akkor nullmértékű, ha E első kategóriájú!