

4. feladatsor

1. Tegyük fel, hogy a $[0, 1] \times [2, 5] \times [-2, 0]$ téglá (x, y, z) pontjában a sűrűség $\rho(x, y, z) = 10 - x + y + 2z$ (ami azt jelenti, hogy az (x, y, z) pontot tartalmazó elég kicsi kockákban ehhez tetszőlegesen közel van a tömeg/térfogat arány). Határozzuk meg a kocka tömegét!
2. Legyen T az a tartomány az xy -sík első síknegyedében, melyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyeneseknek határolnak. Használjuk az $x = u/v, y = uv, u > 0, v > 0$ transzformációt (helyettesítést) az alábbi integrál átírására és kiszámítására!

$$\int_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

Segítség: Legyen $f(u, v) = (u/v, uv)$ ($u, v > 0$). Határozzuk meg f Jacobi determinánsát, valamint azt a H halmazt, amelyre $f(H) = T$ (és f injektív H -n), majd alkalmazzuk az integráltranszformációs tételt!

3. Számítsuk ki az $x^2/a^2 + y^2/b^2$ ($a, b > 0$) egyenletű ellipszis területét az $x = au$, $y = bv$ integráltranszformáció segítségével!
4. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezésre, amelyre teljesül, hogy
 - a) az 1×2 -es álló téglalapot egy 2×1 -es fekvő téglalapba viszi;
 - b) az $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ négyzetet a $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ háromszögbe viszi;
 - c) egy zárt szakaszt egy körvonalba viszi;
 - d) egy négyzetet egy körlapba viszi.
5. Bizonyítsuk be, hogy egy $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció tetszőleges mérhető halmazt $|\det(T)|$ -szeres mértékűbe viszi!
6. (HF) Legyen

$$g(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2), \quad f(u, v) = (uv, u + v).$$

- a) Írjuk fel f és g koordinátafüggvényeit!
 - b) Hol folytonos, hol differenciálható f illetve g ?
 - c) Írjuk fel f és g Jacobi-mátrixait!
 - d) $f \circ g$ és $g \circ f$ közül melyiknek van értelme? Amelyiknek van, azt adjuk meg képlettel!
 - e) Számítsuk ki a kompozíció Jacobi-mátrixát közvetlenül az előző képletből is, valamint a láncszabály segítségével f és g Jacobi-mátrixából is!
7. (HF) Határozzuk meg polárkoordináták és integrálás segítségével az R sugarú h magasságú egyenes körkúp térfogatát!
 8. (HF) Határozza meg egy M tömegű a élhosszúságú homogén egységkocka valamelyik élén átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!