2022. február 16. II. mat. elemző Fejezetek az analízisből 2011-2012/II. félév

2. feladatsor

1. Számítsa ki az $\int_H xy\ dxdy$ kettős integrált, ha

   a) $H = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

   b) H az origó középpontú, egység sugarú kör

   c) H az $A(0, 0), B(2, 1), C(-2, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

   (HF) d) $H = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y \leq x\}$

   (HF) e) H az $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(1, 0)$ csúcsokkal meghatározott trapéz,

   (Gyak) f) H az $A(1, 1), B(1, 0), C(0, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

2. Bizonyítsa be, hogy ha a H normáltartomány

   $$H = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

   alakú, akkor a területe

   $$t(H) = \int_a^b (h(x) - g(x))\ dx.$$

3. Számítsa ki az alábbi felületekkel határolt testek térfogatát!

   a) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$

   (HF) b) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$

4. Mérhető-e a $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ halmaz?

5. A manók egyenletes sűrűséggel és igen sűrűn lakják háromszög alakú városukat, melynek csúcsai az $(1, 2), (3, 2)$ és $(1, 4)$ koordinátájú pontokban vannak. Az x tengelyen egy meleg vizű, az y tengelyen pedig egy hideg vizű folyó folyik.

   a) A manóknak átlagosan milyen messzire kell menniük, ha meleg és milyen messzire ha hideg vizű folyóhoz akarnak menni?

   b) Melyik ponton lakó manónak kell épp ilyen távolságokat menni a folyókhoz?

   (HF) c) Adjunk általános képletet a fenti pontra (melynek neve *súlypont*), amely más alakú városokra is működik!

6. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^2$ diszjunkt mérhető halmazok, akkor $A \cup B$ is mérhető!

7. (HF) Határozzuk meg egy M tömegű, a befogójú homogén derékszögű egyenlőszárú háromszöglapnak a derékszögű csúcsán átmenő, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `https://keletita.web.elte.hu/gyak/fejanal22II2` oldalról is.