5. feladatsor

1. Legyen T az a tartomány az xy-sík első síknegyedében, melyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesenek határolnak. Használjuk az $x = u/v, y = uv, u > 0, v > 0$ transzformációt (helyettesítést) az alábbi integrál átírására és kiszámítására!

$$\int_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx\, dy$$

   Segítség: Legyen $f(u, v) = (u/v, uv)$ $(u, v > 0)$. Határozzuk meg f Jacobi determinánsát, valamint azt a H halmazt, amelyre $f(H) = T$ (és f injektív H-n), majd alkalmazzuk az integráltranszformációs tételt!

2. Számítsuk ki az $x^2/a^2 + y^2/b^2$ $(a, b > 0)$ egyenletű ellipszis területét az $x = au$, $y = bv$ integráltranszformáció segítségével!

3. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezésre, amelyre teljesül, hogy

   a) az 1×2-es álló téglalapot egy 2×1-es fekvő téglalapba viszi;

   b) az $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ négyzetet a $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ háromszögbe viszi;

   c) egy zárt szakaszt egy körvonalba visz;

   d) egy négyzetet egy körlapba visz.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció tetszőleges mérhető halmazt $|\det(T)|$-szeres mértékűbe viszi!

5. (HF) Legyen

$$g(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2), \qquad f(u, v) = (uv, u + v).$$

   a) Írjuk fel f és g koordinátafüggvényeit!

   b) Hol folytonos, hol differenciálható f illetve g?

   c) Írjuk fel f és g Jacobi-mátrixait!

   d) $f \circ g$ és $g \circ f$ közül melyiknek van értelme? Amelyiknek van, azt adjuk meg képlettel!

   e) Számítsuk ki a kompozíció Jacobi-mátrixát közvetlenül az előző képletből is, valamint a láncszabály segítségével f és g Jacobi-mátrixából is!

6. Számítsuk ki az $\int_T xyz\, dx\, dy\, dz$ integrált, ahol T az $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$ $(a, b, c > 0)$ ellipszoid pozitív térnyolcadba eső része! (Segítség: alkalmazzunk alkalmas helyettesítést!)

7. Vannak, akik a gömbi koordinátákat úgy definiálják, hogy ϑ nem a pontba mutató vektor z tengellyel bezárt szöge, hanem az xy síkkal bezárt (előjeles) szöge. (Lásd szélességi koordináták a Földön!). Határozzuk meg, hogyan kell integrálni ezen módosított gömbi koordinátákkal (azaz hogy mivel kell ekkor szorozni az áttérésnél)!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.