4. feladatsor

1. Tegyük fel, hogy a $[0,1]\times[2,5]\times[-2,0]$ tégla (x,y,z) pontjában a sűrűség $\rho(x,y,z)=10-x+y+2z$ (ami azt jelenti, hogy az (x,y,z) pontot tartalmazó elég kicsi kockákban ehhez tetszőlegesen közel van a tömeg/térfogat arány). Határozzuk meg a kocka tömegét!

2. Számítsa ki a következő, Descartes-koordinátákkal megadott pontok henger és gömbi koordinátáit!

   a) $(2,-2,-2)$ (HF) b) $(1,1,1)$ c) $(-3,-4,\frac{\sqrt{3}}{2})$

3. Fogalmazza meg, hol helyezkednek el, illetve rajzolja le a következő halmazok henger koordinátákkal megadott pontjait:

   a) $\{(3,\varphi,z) : 0\le\varphi<2\pi, z\in\mathbb{R}\}$ (HF) b) $\{(r,\frac{\pi}{3},z) : r>0, z\in\mathbb{R}\}$

   (HF) c) $\{(4,\frac{\pi}{3},z) : z\in\mathbb{R}\}$ d) $\{(r,\varphi,-3) : r>0, -\pi<\varphi<\pi\}$

   (Gyak) e) $\{(4,\varphi,5) : \frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{3}\}$ f) $\{(r,\frac{\pi}{3},-5) : r>0\}$

4. Fogalmazza meg, hol helyezkednek el, illetve rajzolja le a következő halmazok gömbi koordinátákkal megadott pontjait:

   a) $\{(3,\vartheta,\varphi) : 0\le\vartheta<\pi, 0\le\varphi<2\pi\}$ (HF) b) $\{(r,1,\varphi) : 0<r, 0\le\varphi<\pi\}$

   (HF) c) $\{(r,\vartheta,\frac{7\pi}{3}) : 0\le r, 0\le\vartheta\le\pi\}$ d) $\{(3,\frac{5\pi}{3},\varphi) : \frac{\pi}{6}\le\varphi<\frac{\pi}{3}\}$

   (Gyak) e) $\{(3,\vartheta,-\frac{\pi}{4}) : \frac{\pi}{6}\le\vartheta<\frac{\pi}{3}\}$ f) $\{(r,\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{3}) : 3<r<5\}$

5. Számítsuk ki az $xy+z$ függvény integrálját az alábbi tartományokon!

   a) $A=\{(x,y,z) : x+y+z\ge 2, x\le 1, y\le 1, z\le 1\}$

   b) $B=\{(x,y,z) : x^2+y^2\le z\le 9\}$

   (HF) c) $C=\{(x,y,z) : x^2+y^2\le 4\le z\le 9\}$

   d) $D=\{(x,y,z) : 1\le x^2+y^2+z^2\le 9, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

6. Határozzuk meg az alábbi testek súlypontját!

   a) 1 sugarú félgömb

   (HF) b) $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ csúcsú tetraéder

   c) R sugarú gömb pozitív térnyolcadba eső része

7. (HF) Számítsa ki a következő, henger koordinátákkal megadott pontok Descartes és gömbi koordinátáit!

   a) $(1,1,-2)$ b) $(2,\frac{\pi}{3},3)$ (Gyak) c) $(3,\frac{5\pi}{3},-4)$ d) $(4,\frac{8\pi}{6},5)$

8. (HF) Számítsa ki a következő, gömbi koordinátákkal megadott pontok Descartes és henger koordinátáit!

   a) $(1,1,-2)$ b) $(2,\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2})$ (Gyak) c) $(3,\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$

9. (HF) Határozzuk meg

   a) polárkoordináták és kettős integrál

   b) hengerkoordináták és hármas integrál

   segítségével az R sugarú h magasságú egyenes körkúp térfogatát!

10. (HF) Határozza meg egy M tömegű a élhosszúságú homogén egységkocka valamelyik élén átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

11. (HF) Határozzuk meg a h magasságú R sugarú M tömegű henger saját tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

12. (Gyak) Legyen A az $x^2+y^2+z^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ egyenlőtlenséggel megadott test, amelynek sűrűsége az (x,y,z) pontban xyz. Mennyi a test tömege?

13. (Gyak) Határozza meg egy M tömegű R sugarú homogén gömb középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!