2. feladatsor

1. Legyen $\psi(x) = \frac{3}{x}$ és $\varphi(x) = \frac{2}{x}$, továbbá $H = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 5, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Számítsa ki a $\int_H f(x, y)\ dxdy$ kettős integrált az alábbi $f(x, y)$ függvényekre!

   a) x/y^2 (HF) b) y/x^2

2. Bizonyítsa be, hogy ha a H normáltartomány

$$H = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

   alakú, akkor a területe

$$t(H) = \int_a^b (h(x) - g(x))\ dx.$$

3. Számítsa ki az $\int_H xy\ dxdy$ kettős integrált, ha

   a) $H = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

   b) H az origó középpontú, egység sugarú kör

   c) H az $A(0, 0), B(2, 1), C(-2, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

   (HF) d) $H = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y \leq x\}$

   (HF) e) H az $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(1, 0)$ csúcsokkal meghatározott trapéz,

   (Gyak) f) H az $A(1, 1), B(1, 0), C(0, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

4. Számítsa ki az alábbi felületekkel határolt testek térfogatát!

   a) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$

   (HF) b) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$

5. A manók egyenletes sűrűséggel és igen sűrűn lakják háromszög alakú városukat, melynek csúcsai az $(1, 2), (3, 2)$ és $(1, 4)$ koordinátájú pontokban vannak. Az x tengelyen egy meleg vizű, az y tengelyen pedig egy hideg vizű folyó folyik.

   a) A manóknak átlagosan milyen messzire kell menniük, ha meleg és milyen messzire ha hideg vizű folyóhoz akarnak menni?

   b) Melyik ponton lakó manónak kell épp ilyen távolságokat menni a folyókhoz?

   c) Adjunk általános képletet a fenti pontra (melynek neve *súlypont*), amely más alakú városokra is működik!

6. (HF) Határozza meg az alábbi testek térfogatát!

   a) $\{(x, y, z) : -2 \leq x \leq -1, 3 \leq y \leq 7, 0 \leq z \leq x^2 y\}$

   b) $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y^3 + z^3, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

7. (HF) Határozzuk meg egy M tömegű, a oldalú homogén négyzetlapnak a négyzet középpontján átmenő, a négyzetlap síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!