2012. február 16. II. mat. elemző Fejezetek az analízisből 2011-2012/II. félév

1. feladatsor

1. Legyen $H = [0, \pi] \times [1, 2]$. Számítsa ki a $\int_H f(x, y)\, dxdy$ kettős integrált, ha $f(x, y) =$

   a) $\sqrt{2x + 3y}$ b) x^2 (HF) c) xe^y d) $\sin x$ e) $\sin y$ f) xy

2. Egy téglalap alakú rétet, amelynek oldalai 20 és 40 méter, egyenletesen beborít a lekaszált fű, minden m^2-re 3 kg jut. 1 kilogramm széna 1 méter távolságra történő elszállítása 5 Ft-ba kerül. Mennyi pénzből lehet az összes szénát a mező közepére vitetni? (Az egyváltozós integrálszámításokat nem muszáj végigszámolni.)

3. Legyen $H = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

   a) $\underline{\int}_H f = ?$, $\overline{\int}_H f = ?$

   b) Integrálható-e az f függvény a H halmazon?

   (HF) c) Mérhető-e a $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ halmaz?

4. Egy $[a, b] \times [c, d]$ téglalap alakú lemez sűrűsége az (x, y) pontban $\rho(x, y)$.

   a) Hogyan lehet a $\rho(x, y)$ függvény ismeretében meghatározni a lemez tömegét?

   (HF) b) Mennyi a lemez tömege, ha $a = c = 1$ cm, $b = 5$ cm, $d = 3$ cm, a sűrűség pedig $\rho(x, y) = 10 + \frac{x}{y}$ g/cm^2 ?

5. Határozza meg az alábbi testek térfogatát!

   a) $\{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\}$

   (HF) b) $\{(x, y, z) : -2 \le x \le -1, 3 \le y \le 7, 0 \le z \le x^2 y\}$

   (HF) c) $\{(x, y, z) : 0 \le x \le y^3 + z^3, 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^2$ diszjunkt mérhető halmazok, akkor $A \cup B$ is mérhető!

7. (HF) Mi az alábbi két állítás logikai kapcsolata, ha $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz?

   (i) Az A halmaz mérhető.

   (ii) Tetszőleges $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható az A halmazon.

8. (HF) A $[0, 10] \times [0, 20]$ téglalap alakú kert (x, y) pontjában a termőföld vastagsága $30 + 10 \cos(x + y)$ cm. Határozzuk meg a termőföld átlagos vastagságát a kertben!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.