2010 április 30. II. elemző analízis 2007-2008/II. félév

Gyakorló feladatok vonalintegrálhoz és Fourier sorokhoz

1. Határozzuk meg az $F(x,y,z) = (xyz, x-y, y+z)$ függvény vonalintegrálját a $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ $(t \in [2,4])$ görbén!

2. Döntsük el az alábbi függvényekről, hogy van-e potenciálfüggvényük! Ha van, akkor adjuk meg!

   a) $(xy, x+y)$ b) $(2xy, x^2)$ c) $(xyz, x-y, y+z)$

   d) $(x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2))$ e) $(-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))$ f) $(yz+1, xz+1, xy+1)$

3. Határozzuk meg az $F(x,y,z) = (yz+1, xz+1, xy+1)$ függvény vonalintegrálját a $\gamma(t) = (e^t, \cos t, t^2)$ $(t \in [\pi, 3\pi])$ görbén!

4. a) Adjunk meg egy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ görbét, amely az origó középpontú R sugarú körvonalat pozitív körüljárással egyszer járja körbe!

   b) Integráljuk ezen a görbén az

   $$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

   függvényt!

   c) Teljesül, hogy $D_2F_1 = D_1F_2$?

   d) Van F-nek potenciálfüggvénye?

   e) Miért nem lehet alkalmazni itt a tanult tételt, mely szerint $D_2F_1 = D_1F_2$ szükséges és elégséges feltétele a potenciálfüggvény létezésének?

5. Legyen

   $$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \left[\frac{x}{\pi}\right] \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } \left[\frac{x}{\pi}\right] \text{ páratlan,} \end{cases}$$

   ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli.

   a) Ábrázoljuk f-et és ellenőrizzük, hogy periodikus 2π szerint!

   b) Határozzuk meg f Fourier sorát!

   c) Előállítja-e f-et 0-ban a Fourier sora?

   d) Határozzuk meg, hogy pontosan mely pontokban állítja elő f-et a Fourier sora!

   e) Határozzuk meg a Fourier sor összegfüggvényét és ábrázoljuk!

   f) A kapott összefüggést $x = \pi/2$-re fölírva határozzuk meg az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$ sor összegét!

6. Bizonyítsuk be, hogy egy páros függvény Fourier sorában nincs (nem 0 együtthatós) szinuszos tag, egy páratlan függvény Fourier sorában pedig csak szinuszos tagok vannak!

7. Legyen $f(x)$ az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

   a) $f(x) = x$ ha $x \in [0, 2\pi)$.

   b) $f(x) = |x|$ ha $x \in [-\pi, \pi]$.

   Csináljuk végig ezekre a függvényekre is a 5/a,b,c,d,e feladatokat!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.