2010. március 19. II. elemző analízis 2009-2010/II. félév

5. feladatsor

1. Legyen $H = [0,\pi]\times[1,2]$. Számítsa ki a $\int_H f(x,y)\,dxdy$ kettős integrált, ha $f(x,y) =$

   a) $x\sin y$ b) x^2 c) $\sqrt{x+2y}$

   (HF) d) xe^y e) $\sin x$ f) $\sin y$

   (Gyak) g) $x+y$ h) xy i) $\sin(x+y)$

2. Legyen $H = [0,1]\times[0,1]$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x,y\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$

   a) $\underline{\int}_H f = ?$, $\overline{\int}_H f = ?$

   b) Integrálható-e az f függvény a H halmazon?

   (HF) c) Mérhető-e a $(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(\mathbb{Q}\cap[0,1])$ halmaz?

3. Egy $[a,b]\times[c,d]$ téglalap alakú lemez sűrűsége az (x,y) pontban $\rho(x,y)$.

   a) Hogyan lehet a $\rho(x,y)$ függvény ismeretében meghatározni a lemez tömegét?

   (HF) b) Mennyi a lemez tömege, ha $a=c=1$ cm, $b=5$ cm, $d=3$ cm, a sűrűség pedig $\rho(x,y) = 10+\frac{x}{y}$ g/cm^2 ?

4. Határozza meg az alábbi testek térfogatát!

   a) $\{(x,y,z) : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\}$

   (HF) b) $\{(x,y,z) : -2\le x\le -1, 3\le y\le 7, 0\le z\le x^2y\}$

   (HF) c) $\{(x,y,z) : 0\le x\le y^3+z^3, 1\le y\le 2, 0\le z\le 3\}$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A,B\subset\mathbb{R}^2$ diszjunkt mérhető halmazok, akkor $A\cup B$ is mérhető!

6. (HF) Mi az alábbi két állítás logikai kapcsolata, ha $A\subset\mathbb{R}^2$ korlátos halmaz?

   (i) Az A halmaz mérhető.

   (ii) Tetszőleges $f : A\to\mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható az A halmazon.

7. (HF) A $[0,10]\times[0,20]$ téglalap alakú kert (x,y) pontjában a termőföld vastagsága $30+10\cos(x+y)$ cm. Határozzuk meg a termőföld átlagos vastagságát a kertben!

8. (HF) Határozzuk meg egy M tömegű, a oldalú homogén négyzetlapnak a négyzet középpontján átmenő, a négyzetlap síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.