2010. március 5. II. elemző analízis 2009-2010/II. félév

4. feladatsor

1. Milyen méretek esetén lesz maximális a térfogata egy egységnyi felszínű henger alakú (felül nyitott) pohárnak?

2. Egy szúnyog koordinátái a t időpillanatban $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = \frac{1}{t^2+1}$.
   a) Adja meg a szúnyog helyét az idő függvényében leíró $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ leképezést!
   b) Adja meg a szúnyog sebességét t függvényében!
   c) A levegő hőmérséklete az (x, y, z) pontban $H(x, y, z) = 20 + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. Mennyi a levegő hőmérséklete abban a pontban, ahova a szúnyog a t=5 pillanatban érkezik?
   d) Adja meg azt a g függvényt, ami az időpontból közvetlenül számolja a hőmérsékletet a szúnyog pályáján! Melyik két függvény kompozíciója g?
   (HF) e) Határozzuk meg g deriváltját közvetlenül is, és a kompozíció alapján is!

3. Határozzuk meg a $2x + 3y + 4z$ függvény maximumát és minimumát az origó középpontú 1 sugarú gömb felszínén!

4. Egy hegy felületét az $F(x, y) = 30 - \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100}$ függvény írja le. Adjuk meg a kiránduló ösvény legmagasabb pontját, ha az ösvény pontjainak koordinátái kielégítik a következő feltételeket:

   a) $1 = y + x^2y$ (HF) b) $4x^2 + 9y^2 = 36$

5. (HF) Legyen (a) $f(x, y) = (2x, 2y)$ (b) $f(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Milyen alakzatba viszi az f függvény az origó középpontú, egység sugarú kört és egy egység oldalú négyzetet?

6. (HF) Egy foltos szalamandra a melegedés reményében lefele mászik a hegyről, ahova tudatlan turisták felvitték. A szalamandra koordinátáit az idő függvényében az $f(t) = (t, t, 1000 - t^2)$ leképezés adja meg, a $t \in [0, 30]$ időintervallumban. A szikla hőmérséklete az (x, y, z) pontban $H(x, y, z) = 15 + \frac{2000}{z}$.

   a) Milyen irányba megy a szalamandra?

   b) Milyen gyorsan változik a szikla hőmérséklete a foltos szalamandra pályáján?

7. (HF) Határozza meg f maximumát a megadott feltétel mellett!

   a) $f(x, y) = xy \quad x^2 + y^2 = 1$ b) $f(x, y, z) = x - y + 3z \quad x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$

   c) $f(x, y) = xyz \quad xy + yz + xz = 8$

   d) $f(x, y) = xyz \quad xy + yz + xz = 8, \quad x, y, z \geq 0$

   (Gy) e) $f(x, y) = xyz \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$ f) $f(x, y) = xy \quad x + y = 5$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.