2010 február 19. II. elemző analízis 2009-2010/II. félév

2. feladatsor

1. a) Igaz-e, hogy minden kétváltozós másodfokú polinom

   $$p(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy$$

   alakú?

   b) Határozzuk meg a fenti p polinom nulladik, első és másodrendű parciális deriváltjait $(0,0)$-ban!

   c) Határozzuk meg azt a kétváltozós másodfokú polinomot, amelynek minden legfeljebb másodrendű parciális deriváltja megegyezik egy adott kétszer differenciálható f függvény megfelelő parciális deriváltjával a $(0,0)$ pontban, majd ellenőrizzük le, hogy f $(0,0)$-beli második Taylor polinomját kaptuk!

   (HF) d) Írjuk föl egy kétváltozós kétszer differenciálható $f(x,y)$ függvény (a,b) pontbeli második Taylor polinomját!

   (HF) e) Mutassuk meg, hogy az előbb kapott polinom minden legfeljebb másodrendű parciális deriváltja megegyezik f megfelelő parciális deriváltjaival az (a,b) pontban!

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális maximum illetve minimumhelyeit!

   a) $3x^2 + 5y^2$ b) $\frac{2}{3}x^3 + y^4 + xy$ c) xy

   (HF) d) $e^{y^2-x^2}$ e) $xyz + x^2 + y^2 + z^2$ f) $x^3 + y^3$ g) $x^4 + y^4$

   h) $-2x^2 - y^4$ i) $(2x-5y)^2$ j) $(1+e^y)\cos x - ye^y$

3. (HF) a) Bizonyítsuk be, hogy ha

   $$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) > \left(f''_{xy}(a,b)\right)^2,$$

   akkor f-nek (a,b)-ben szigorú lokális szélsőértékhelye van!

   b) Mitől függ a fenti esetben, hogy (a,b)-ben szigorú lokális minimum vagy maximum van?

   c) Mit mondhatunk, ha $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ és $f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) < (f''_{xy}(a,b))^2$?

   d) És ha $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ és $f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) = (f''_{xy}(a,b))^2$?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.