

8. feladatsor

- Határozza meg a következő függvények parciális deriváltjait!

a) $f(x, y) = x \cos(ye^z) + z$ b) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ c) $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}^n$)
 (HF) d) $f(x, y) = \sin(xy)$ e) $f(x, y) = (x + 2y) \sin(x + 2y)$
 f) $g(x, y, z) = \sin z \cdot (\cos x)^{\log y}$ g) $g(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1 + \dots + x_n}$
 h) $g(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ i) $g(x, y, z) = x^{y^z}$
- Rajzoljuk le az alábbi halmazokat, határozzuk meg a belső-, külső- és határpontjaikat, és döntsük el mindegyik halmazról, hogy nyílt-e, zárt-e, és hogy korlátos-e!

a) $\{h \in \mathbb{R} : -3 \leq h \leq 5\}$ b) $\{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 5\}$ c) $\{h \in \mathbb{R} : h < 3\}$
 d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
 (HF) f) $\{h \in \mathbb{R} : -3 < h < 5\}$ g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$
 h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < x < 5\}$ i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\}$
 j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq -4\}$ k) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
 l) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ m) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- Mely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontokban nulla az $f(x, y)$ függvény mindkét parciális deriváltja? Mely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontokban van az $f(x, y)$ függvénynek lokális szélsőértékhelye?

a) $f(x, y) = x^3$ b) $f(x, y) = x^2$ c) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 (HF) d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e) $f(x, y) = (x + y)^2$ f) $f(x, y) = x^3 + y^3$
- Határozzuk meg az alábbi függvények maximumát, minimumát a megadott halmazokon, és azt is, hogy hol veszi föl ezeket a függvény!

a) $f(x, y) = xy + x^2 + y^2$, $H = [-2, 2] \times [-1, 1]$.
 (HF) b) $f(x, y) = xy$, $H = \{h \in \mathbb{R}^2 : |h| \leq 3\}$
- (HF) Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. Igazak-e a következő állítások?

a) Ha $x \in H$, akkor x belső pontja H -nak.
 b) Ha $x \notin H$, akkor x nem lehet belső pontja H -nak.
 c) Ha $x \in H$, akkor x nem lehet határpontja H -nak.
 d) Ha $x \notin H$, akkor x nem lehet határpontja H -nak.
 e) Van olyan halmaz, amelynek minden pontja határpont.
 f) Van olyan halmaz, amelynek minden pontja belső pont.
 g) Van olyan halmaz, amelynek nincs belső pontja.
- (HF) Igaz-e, hogy ha $x_n \rightarrow a > 0$ és $y_n \rightarrow b$, akkor $x_n^{y_n} \rightarrow a^b$?
- (HF) Bizonyítsa be, hogy H akkor és csak akkor zárt, ha minden határpontját tartalmazza!

8. (HF) Kirajzoltuk néhány függvény szintvonalas térbeli grafikonját.

A függvények: $2x - 3y$, $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{1}{x+y}$, $\sin x$, $\sin x + \sin y$,
 $\sin x \cdot \sin y$, $x^2 - y^2$, $(x + y)^2$, xy

a) Keresse meg a rajzokhoz tartozó képleteket!

b) Keressünk lokális szélsőérték helyeket és nyeregpontokat a grafikonokon!

