

## 5. feladatsor

1. Adja meg a következő függvények  $a = 0$  körüli Taylor-sorát! Határozza meg a Taylor sor konvergenciatartományát és döntse el, hogy előállítja-e a Taylor sor a függvényt a konvergenciatartományban!

a)  $e^{2x}$     b)  $e^{-x}$     c)  $\frac{x}{1-x}$     d)  $\operatorname{sh} x$     e)  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

(HF) f)  $\operatorname{ch} x$     g)  $\sin(2x)$     h)  $e^{-x^2}$     i)  $\cos x$     j)  $\frac{1}{1+x}$

(HF) k)  $\cos x^2$     l)  $\log(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x$     m)  $\frac{x^3}{1+x^4}$     \* n)  $\sin^2 x$

2. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0$ -ban akárhányszor differenciálható függvény. Igazak-e a következő állítások?

(a)  $f$  Taylor-sora mindig felírható.

(b)  $f$  Taylor-sora minden valós  $x$  helyen konvergens.

(c) Ha  $f$  Taylor-sora konvergens egy  $x_0$  pontban, akkor abban a pontban a Taylor-sor összege  $f(x_0)$ .

(d) Ha egy  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sor előállítja az  $f$  függvényt, akkor ez a hatványsor megegyezik  $f$  Taylor-sorával.

(e) Ha  $f(x)$  Taylor-sora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , akkor minden valós  $x$  esetén  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ .

3. Számítsa ki az  $1 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \frac{\pi^{10}}{10!} + \dots$  összeget!

4. Racionális tagokból álló sor összegeként felírva, majd a sort a részletösszegekkel közelítve, határozza meg az alábbi számok tizedesvessző utáni első két számjegyét!

a)  $\sin 1$     b)  $\log 2$  (segítség:  $\log 2 = -\log(1 - \frac{1}{2})$ )    (HF) c)  $e$     d)  $\pi$

5. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x+4)^n$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$     (HF) c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n \cdot 2^n}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+7)^n$

6. Állítsuk elő hatványsor alakban a  $\cos \sqrt{x}$  és  $\operatorname{ch} \sqrt{-x}$  függvényeket! Hasonlítsuk össze a két hatványsort, majd találjuk ki, miért nem ellentmondás az amit kaptunk!

7. Számítsa ki a megadott deriváltakat!

a)  $\left(\frac{1}{1-x}\right)_{|x=0}^{(135)}$     b)  $\left(e^{-x^2}\right)_{|x=0}^{(136)}$     c) (HF)  $(\operatorname{arctg} x)_{|x=0}^{(356)}$     d) (HF)  $(\operatorname{arctg} x)_{|x=0}^{(357)}$

8. Írja fel a  $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  függvényt hatványsor alakban! Számítsa ki  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  értékét két tizedesjegy pontossággal!

9. \* Bizonyítsa be, hogy az  $e$  szám irracionális!