

4. feladatsor

1. Határozza meg a hatványsorok konvergenciatartományát!

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n} \quad (b) \text{ (HF) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n\sqrt{n}} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^n$$

2. Igazak-e a következő állítások?

$$(a) \int_{-0,2}^{0,3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-0,2}^{0,3} x^n dx \right)$$

$$(b) \int_{-2}^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-2}^3 x^n dx \right)$$

$$(c) \text{ (HF) } \forall x \in \mathbb{R} - \text{re} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{1}{1-x}$$

$$(d) \forall |x| < 1 - \text{re} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{1}{1-x}$$

3. Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$ függvény a teljes számegegyenesen kielégíti az $f'''(x) = f(x)$ egyenletet!

4. Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát! A konvergenciatartományban adja meg az összegfüggvényeket!

$$(a) 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (b) 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots \quad (c) x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$(d) \text{ (HF) } -x^2 + x^4 - x^6 + - \dots \quad (e) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad (f) x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

5. * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = ?$

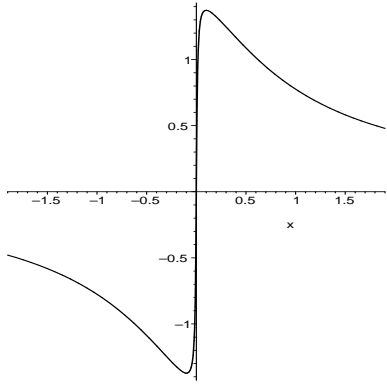
6. (HF) A $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ hatványsort $[b, 0]$ -n integrálva bizonyítsa be, hogy

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{igaz} \quad -1 < b < 0 \text{ esetén is!}$$

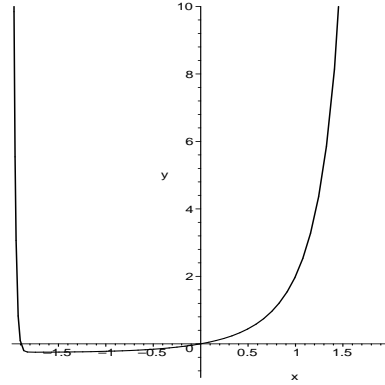
7. (HF) Konvergens-e, illetve egyenletesen konvergens-e \mathbb{R} -en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctg(n+1)x - \arctg(nx)) ?$$

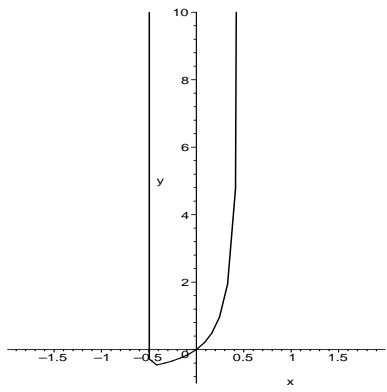
8. (HF) A hátoldal ábráin néhány fenti függvénysor 100-adik részletösszegét ábrázoltuk. Melyek ezek a függvénysorok?



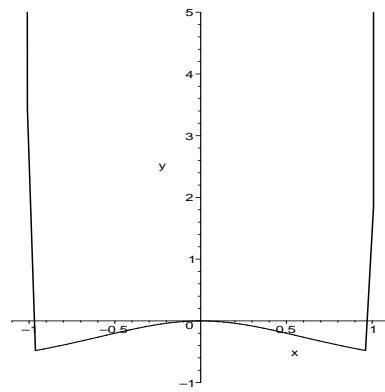
1.



2.



3.



4.