

3. feladatsor

1. Hol konvergensek a következő függvénysorok? Adja meg az összegfüggvényeket!

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$ c) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

(HF) d) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ e) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - x^2)^n$

2. Konvergensek-e, illetve egyenletesen konvergensek-e \mathbb{R} -en a következő függvénysorok?

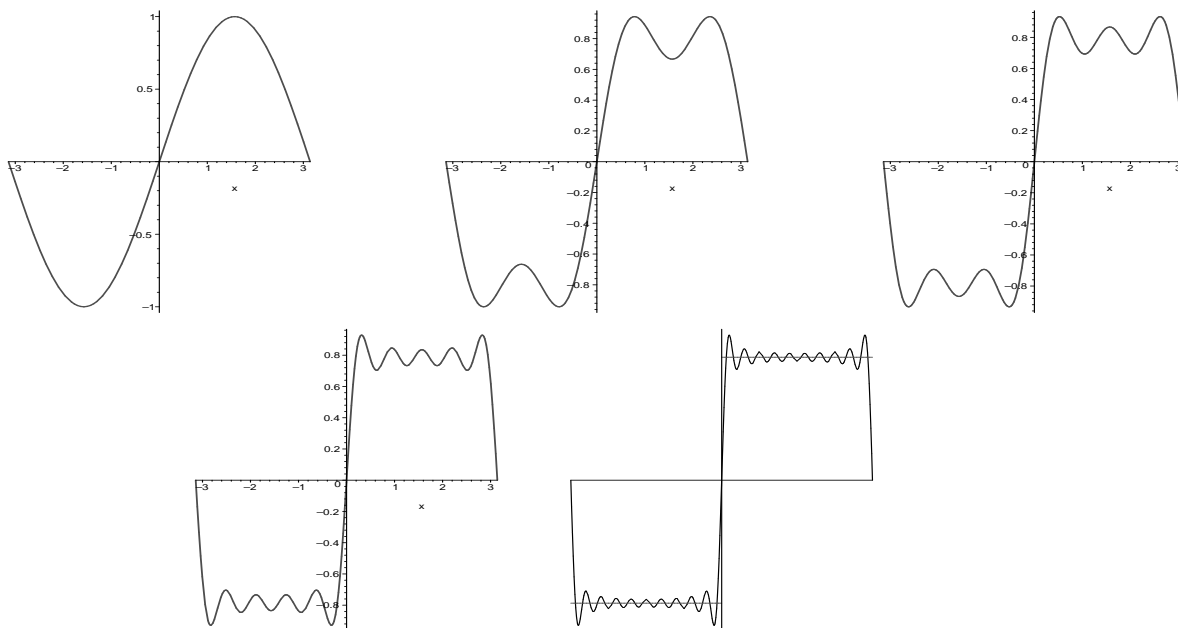
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ (HF) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$

3. Legyen $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ -ra f_n folytonos, $\sum_n f_n$ a $(-1, 1)$ -en konvergens, az összegfüggvény viszont nem folytonos $(-1, 1)$ -en! Egyenletes-e a konvergencia?

4. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysort $[a, 0]$ -n integrálva bizonyítsuk be, hogy

$$-\log(1 - a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \quad \text{igaz } -1 < a < 0 \text{ esetén is!}$$

5. (HF) A következő ábrákon a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ függvénysor részletösszegeit láthatjuk. A függvénysor konvergens, az utolsó ábrán a limeszfüggvény, a “négyyszögjel” is látható. Egyenletesen konvergense-e ez a függvénysor?



6. (HF) Legyen $f_n(x) = \arctg(nx)$.

a) Hol konvergens az f_n függvénysorozat?

b) Hova tart pontonként az f_n függvénysorozat?

c) Egyenletes konvergens az f_n függvénysorozat a teljes számegetesen?

7. (HF) Rajzoltassuk ki számítógéppel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ függvénysorozat néhány részletösszegét, majd a grafikonok alapján sejtjük meg, hogy mi az összegfüggvény!