

## 2. feladatsor

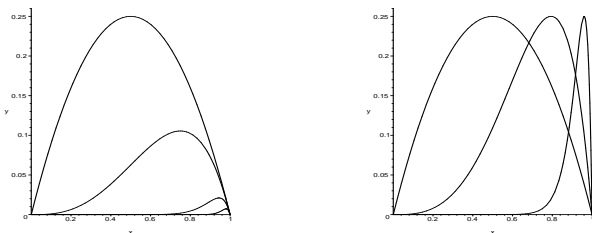
1. Tegyük fel, hogy a  $[0, \pi]$  intervallumon  $f_n(x) \rightarrow \cos x$

a) pontonként.

b) egyenletesen.

Mit mondhatunk ez alapján  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\pi)$ -ről?

2. A rajzokon az  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$  függvénysorozat 1., 2., 17. és 120. tagja, illetve az  $f_n(x) = x^n - x^{2n}$  függvénysorozat 1., 3. és 17. tagja látható. Melyik függvényhez konvergálnak a függvénysorozatok a  $[0, 1]$  intervallumon? Egyenletes-e a konvergencia?



3. Határozzuk meg a következő állítások logikai kapcsolatát!

a) **P:**  $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$       **Q:**  $[a, b]$ -n  $f_n$  egyenletesen tart  $f$ -hez.

(HF) b) **P:**  $[0, 1]$ -n  $f_n$  egyenletesen tart  $f$ -hez      **Q:**  $[0, 2]$ -n  $f_n$  egyenletesen tart  $f$ -hez.

c) **P:**  $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 5$       **Q:**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 5$

d) **P:**  $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$       **Q:**  $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f(x)) = 0$

4. Legyen  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 5 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelynek minden függvénye minden pontban folytonos, és a függvénysorozat az előbbi  $f$  függvényhez tart! Lehet-e a konvergencia egyenletes?

5. Bizonyítsuk be, hogy az  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$  függvénysorozat a  $[0, 1]$  intervallumon nem egyenletesen konvergens, de bármilyen  $0 < a < 1$  számra egyenletesen konvergens az  $[a, 1]$  intervallumon!

6. (HF) Bizonyítsa be, hogy az  $f_n(x) = \cos nx$  függvénysorozat konvergens az  $x = 2k\pi$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) pontokban! Konvergens-e a függvénysorozat az  $x = (2k + 1)\pi$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) pontokban?

7. (HF) Adjunk meg 3 különböző függvénysorozatot úgy, hogy mindhárom függvénysorozat egyenletesen konvergáljon az azonosan 5 függvényhez  $[0, 1]$ -en! Állhatnak-e az előbbi függvénysorozatok csak olyan függvényekből, amelyek nem folytonosak  $[0, 1]$ -en?

8. (HF) Legyen  $f_n(x) = n^2(x^{n-1} - x^n)$ . Bizonyítsuk be, hogy

a)  $\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq 0$ ;

c)  $[0, 1]$ -en az  $f_n$  függvénysorozat nem tart egyenletesen az azonosan 0 függvényhez.