

1. feladatsor

1. Milyen x esetén konvergensek a következő függvénysorozatok, azaz mely x értékek esetén létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték? Ahol konvergensek, ott határozza meg és ábrázolja a limeszfüggvényt!

(a) $f_n(x) = \frac{x}{n}$

(b) $f_n(x) = nx$

(c) $f_n(x) = x^n$

(d) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

(e) $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$

(f) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$

(g) $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$

(h) $f_n(x) = \cos\left(x + \frac{1}{n}\right)$

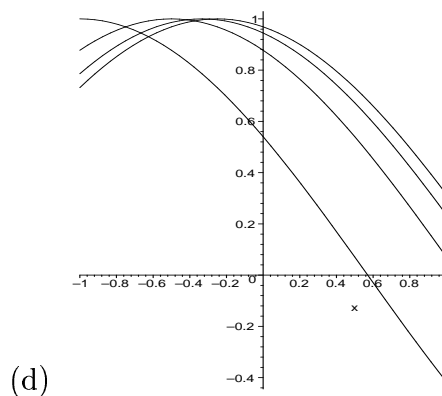
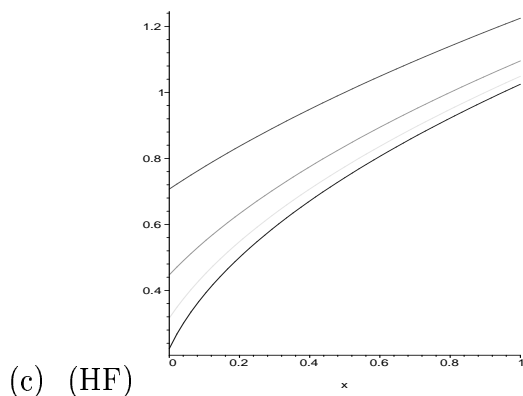
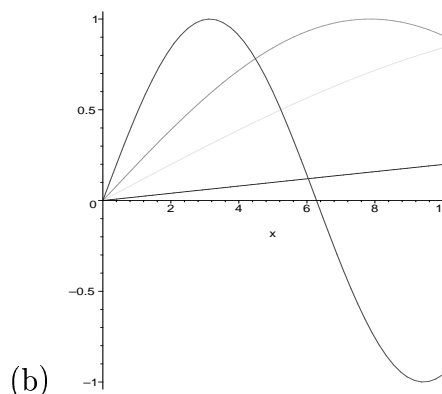
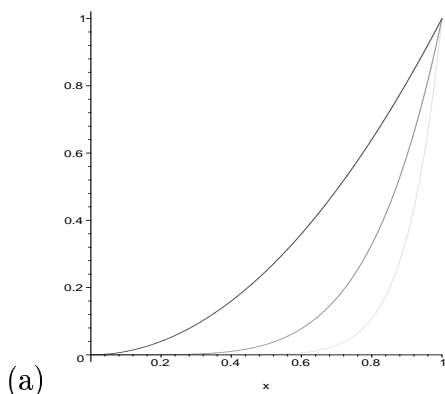
(i) $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

(j) (HF) $f_n(x) = \frac{\cos x}{n}$

(k) $f_n(x) = \cos \frac{x}{n}$

(l) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

2. Az előző feladat függvénysorozataiból ábrázoltunk négyet. Melyek ezek? Rajzoljon a többi közül is néhány függvénysorozathoz hasonló ábrákat!



3. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+nx} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx} \right)$

(c) (HF) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \right)$

4. Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + x} \quad (c) \text{(HF)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n}$$

5. (HF) Határozza meg a következő sorozatok határértéket, ha vannak!

$$(a) \frac{5n-1}{7n+2} \quad (b) \frac{2^n+3^n}{5^n} \quad (c) \sqrt[2]{2+n} \quad (d) \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(e) \text{(Gyak)} \frac{n}{n+1} \quad (f) 2^{-n} + n^{-2} \quad (g) \frac{2n^6+3n^5}{7n^6-2} \quad (h) \frac{n+\frac{1}{n}}{n+1}$$

$$(i) \sqrt[2]{2^n} \quad (j) \sqrt[3]{3^n} \quad (k) \sqrt[2]{2^n+3^n} \quad (l) \sqrt[n]{n}$$

$$(m) \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}} \quad (n) \sqrt[2]{2^n+1} \quad (o) \frac{n^2+(-1)^n}{3n^2+1} \quad (p) \sqrt[2]{10^{10}n^n}$$

6. (HF) Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 3} \{x\} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \{x\} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$$

$$(e) \text{(Gyak)} \lim_{x \rightarrow 3^+} [x] \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \quad (g) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \quad (h) \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x} \quad (j) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \quad (k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \quad (l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$$

7. (HF) Számítsa ki a következő sorok összegét!

$$(a) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

8. (HF) Konvergensek-e a következő sorok?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+3^n} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$(j) \text{(Gyak)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2} \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.