

5. feladatsor

- Legyen $H = [0, \pi] \times [1, 2]$. Számítsa ki a $\int_H f(x, y) dx dy$ kettős integrált, ha $f(x, y) =$
 a) $\sin x$ b) $\sin y$ c) $\sqrt{x+2y}$ (HF) d) $\sin(x+y)$
 (HF) e) x^2 f) $x+y$ g) xe^y h) xy
- Egy téglalap alakú rétet, amelynek oldalai 20 és 40 méter, egyenletesen beborít a lekaszált fű, minden m^2 -re 3 kg jut. 1 kilogramm széna 1 méter távolságra történő elszállítása 5 Ft-ba kerül. Mennyi pénzből lehet az összes szénát a mező közepére vitetni? (Az egyváltozós integrálszámításokat nem muszáj végigszámolni.)
- Legyen $H = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
 a) $\int_H f = ?$, $\overline{\int}_H f = ?$
 b) Integrálható-e az f függvény a H halmazon?
 c) Mérhető-e a $(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ halmaz?
- Egy $[a, b] \times [c, d]$ téglalap alakú lemez sűrűsége az (x, y) pontban $\rho(x, y)$.
 a) Hogyan lehet a $\rho(x, y)$ függvény ismeretében meghatározni a lemez tömegét?
 (HF) b) Mennyi a lemez tömege, ha $a = c = 1$ cm, $b = 5$ cm, $d = 3$ cm, a sűrűség pedig $\rho(x, y) = 10 + \frac{x}{y}$ g/cm² ?
- Határozza meg az alábbi testek térfogatát!
 a) $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\}$
 (HF) b) $\{(x, y, z) : -2 \leq x \leq -1, 3 \leq y \leq 7, 0 \leq z \leq x^2y\}$
 (HF) c) $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y^3 + z^3, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$
- Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^2$ diszjunkt mérhető halmazok, akkor $A \cup B$ is mérhető!
- (HF) Mi az alábbi két állítás logikai kapcsolata, ha $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz?
 (i) Az A halmaz mérhető.
 (ii) Tetszőleges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható az A halmazon.
- (HF) A $[0, 10] \times [0, 20]$ téglalap alakú kert (x, y) pontjában a termőföld vastagsága $30 + 10 \cos(x+y)$ cm. Határozzuk meg a termőföld átlagos vastagságát a kertben!
- (HF) Határozzuk meg egy M tömegű, a oldalú homogén négyzetlapnak a négyzet középpontján átmenő, a négyzetlap síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségnyi nyomatékát!