2008 február 26. II. elemző analízis 1. csoport 2007-2008/II. félév

3. feladatsor

1. Legyen
$$g(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2), \qquad f(u,v) = (uv, u+v).$$
   a) Írjuk fel f és g koordinátafüggvényeit!

   b) Hol folytonos, hol differenciálható f illetve g?

   c) Írjuk fel f és g Jacobi-mátrixait!

   d) $f \circ g$ és $g \circ f$ közül melyiknek van értelme? Amelyiknek van, azt adjuk meg képlettel!

   e) Számítsuk ki a kompozíció Jacobi-mátrixát közvetlenül az előző képletből is, valamint a láncszabály segítségével f és g Jacobi-mátrixából is!

2. Legyen $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

   a) Mi lesz a képe a $[0, 1000]$ szakasznak?

   (HF) b) Írjuk fel f Jacobi-mátrixát!

   (HF) c) A t változót időnek képzelve, a kapott mátrixnak mint oszlopvektornak mi a fizikai jelentése?

3. Fejezzük ki az alábbi függvények deriváltjait a megadott helyeken az f függvény parciális deriváltjainak segítségével!

   a) $F(t) = f(t, t^2, t^3)$ $\quad t = 1$-ben

   (HF) b) $G(t) = f(e^t, \log t, \sqrt{t}, \cos t)$ $\quad t = \pi$-ben

4. Bizonyítsuk be illetve határozzuk meg a láncszabály előadáson szereplő következményének segítségével az alábbi ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) deriválási szabályokat!

   a) $(fg)' = f'g + fg'$ $\qquad$ (HF) b) $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\qquad$ c) $(f^g)' = ?$

5. Vezessük le a láncszabályból a tanult következményét!

6. (HF) Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezésre, amelyre teljesül, hogy

   a) az 1×2-es álló téglalapot egy 2×1-es fekvő téglalapba viszi;

   b) az $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ négyzetet a $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ háromszögbe viszi;

   c) egy zárt szakaszt egy körvonalba visz;

   d) egy négyzetet egy körlapba visz.

7. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ mindenhol, akkor $F(t) = f(t, -t)$ konstans! (Ötlet: Nézzük $F'(t)$-t!)

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.