

2. feladatsor

1. a) Igaz-e, hogy minden kétváltozós másodfokú polinom

$$p(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy$$

alakú?

b) Határozzuk meg a fenti p polinom nulladik, első és másodrendű parciális deriváltjait $(0, 0)$ -ban!

c) Határozzuk meg azt a kétváltozós másodfokú polinomot, amelynek minden legfeljebb másodrendű parciális deriváltja megegyezik egy adott kétszer differenciálható f függvény megfelelő parciális deriváltjával a $(0, 0)$ pontban, majd ellenőrizzük le, hogy f $(0, 0)$ -beli második Taylor polinomját kaptuk!

(HF) d) Írjuk föl egy kétváltozós kétszer differenciálható $f(x, y)$ függvény (a, b) pontbeli második Taylor polinomját!

(HF) e) Mutassuk meg, hogy az előbb kapott polinom minden legfeljebb másodrendű parciális deriváltja megegyezik f megfelelő parciális deriváltjaival az (a, b) pontban!

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális maximum illetve minimumhelyeit!

a) $3x^2 + 5y^2$ b) $\frac{2}{3}x^3 + y^4 + xy$ c) xy

(HF) d) $e^{y^2-x^2}$ e) $xyz + x^2 + y^2 + z^2$ f) $x^3 + y^3$ g) $x^4 + y^4$

h) $-2x^2 - y^4$ i) $(2x - 5y)^2$ j) $(1 + e^y) \cos x - ye^y$

3. Jelölje $E(x, y)$ egy test energiáját az (x, y) pontban! Mely pontokban van a test egyensúlyban? Milyen az egyensúlyi helyzet (stabil, labilis, közömbös)?

a) $E(x, y) = x^2 + y^2$ b) $E(x, y) = x^2 - y^2$ c) $E(x, y) = (x - y)^2$

(HF) d) $E(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e) $E(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ f) $E(x, y) = x^3 y^2 (5 - x - y)$

4. (HF) a) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(a, b)f''_{yy}(a, b) > (f''_{xy}(a, b))^2,$$

akkor f -nek (a, b) -ben szigorú lokális szélsőértékhelye van!

b) Mitől függ a fenti esetben, hogy (a, b) -ben szigorú lokális minimum vagy maximum van?

c) Mit mondhatunk, ha $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ és $f''_{xx}(a, b)f''_{yy}(a, b) < (f''_{xy}(a, b))^2$?

d) És ha $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ és $f''_{xx}(a, b)f''_{yy}(a, b) = (f''_{xy}(a, b))^2$?

Ne felejtsek el, hogy házi feladat az előző feladatsorról elnapolt 4/d, e, 7. és 8. feladat is!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.