1. feladatsor

1. Parciálisan deriválhatóak-e a következő függvények a $(0,0)$ pontban? Folytonosak-e a $(0,0)$ pontban?

   a) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } xy \neq 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } xy \neq 0 \\ |x|+|y|, & \text{egyébként} \end{cases}$

   (HF) c) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } xy \neq 0 \\ x^2+y^2, & \text{egyébként} \end{cases}$ d) $f(x,y) = |x+y|$

2. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

   a) Mennyi $f'_x(0,0)$ és $f'_y(0,0)$?

   b) Mennyi $f'_x(0,y)$ ha $y \neq 0$ és mennyi $f'_y(x,0)$ ha $x \neq 0$?

   c) Mennyi $f''_{xy}(0,0)$ és $f''_{yx}(0,0)$?

   d) Miért nincs ez ellentmondásban Young tételével?

   e) Differenciálható-e kétszer f a $(0,0)$-ban?

3. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

   a) Ha f folytonos az x_0 pontban, akkor ott differenciálható.

   b) Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor f az x_0 pontban folytonos.

   c) Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai az x_0 pontban, akkor f az x_0 pontban folytonos.

   d) Ha f-nek léteznek és folytonosak a parciális deriváltjai az x_0 pontban, akkor f az x_0 pontban differenciálható.

   e) Ha f-nek léteznek és folytonosak a parciális deriváltjai az x_0 pontban, akkor f az x_0 pontban folytonos.

   (HF) f) Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor f-nek x_0-ban léteznek a parciális deriváltjai.

   (HF) g) Ha x_0-ban f-nek léteznek a másodrendű parciális deriváltjai, akkor f 2-szer differenciálható x_0-ban.

   (HF) h) Ha x_0-ban f-nek léteznek és folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai, akkor f 2-szer differenciálható x_0-ban.

   (HF) i) Ha f az x_0 pontban 2-szer differenciálható, akkor x_0-ban léteznek f másodrendű parciális deriváltjai.

   (HF) j) Ha f az x_0 pontban 2-szer differenciálható, akkor x_0-ban léteznek f parciális deriváltjai, és a parciális deriváltak x_0-ban folytonosak.

4. Határozza meg a következő függvények elsőrendű és másodrendű parciális deriváltjait!

   a) $f(x,y) = x^y$ (HF) b) $f(x,y) = \sin(xy)$ c) $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xz - 4yz$

   (HF) d) $g(x,y,z) = \sin z \cdot (\cos x)^{\log y}$ e) $g(x,y,z) = x^{y^z}$

5. a) Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin(x+y)$ függvény összes k-adrendű parciális deriváltját minden k-ra!

   b) Bizonyítsuk be, hogy $f(x,y) = \sin(x+y)$ akárhányszor differenciálható!

6. Van-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f'_x(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$ és $f'_y(x,y) = \cos(x-y)$?

7. (HF) Legyen $f(x,y,u,v) = x^2 \cdot \log(\operatorname{arctg} y + z^2 + 10 + v^4)$. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat!

   a) f'''_{xxx} b) $f^{(6)}_{xyxuxv}$

8. (HF) Hány különböző k-adrendű parciális deriváltja lehet egy n-változós függvénynek?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.