2007 november 30. II. elemző analízis 1. csoport 2007-2008/II. félév

9. (idei utolsó) feladatsor

1. Írja fel a következő függvények gradiensét azokban a pontokban, ahol létezik!

   a) $f(x,y) = x \sin y$ (HF) b) $g(x,y) = (x+y^2)e^{x^2+y}$ c) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjait a megadott pontokban érintő síkok illetve hipersíkok egyenletét!

   a) $f(x,y) = x^y$ $(2,3)$

   (HF) b)$f(x,y) = \sin(xy)$ $(\frac{1}{2}, \pi)$

   (HF) c) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ $(1,2,\ldots,n)$

   (HF) d) $f(x,y,z) = xy^2 - z^3$ $(3,2,1)$

3. Határozza meg a következő függvények $\alpha = 30°$-os szöghöz tartozó iránymenti deriváltját a $(3,5)$ pontban!

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (HF) (b) $g(x,y) = (x+y)^2$ (c) $h(x,y) = xe^y$

4. Milyen irányban lesz az iránymenti derivált maximális, illetve minimális a $(-4,2)$ pontban?

   a) $f(x,y) = (x-y)^2$ (HF) b) $g(x,y) = x^2 + \frac{2}{xy}$ c) $h(x,y) = \log xe^y$

5. Egy terepasztal felületét az $f(x,y)$ függvénnyel adjuk meg. Milyen irányban indul el a felület adott P illetve Q pontjai fölé helyezett golyó?

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $P = (1,2)$ $Q = (2,1)$

   (HF) b) $e^{-(x^2+y^2)}$ $P = (1,2)$, $Q = (2,1)$

   (HF) (c) $x^3 + y^3 - 9xy$ $P = (2,0)$, $Q = (-2,1)$

6. Legyen $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Írja fel az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ponton áthaladó szintvonal egyenletét, valamint a szintvonal érintőjét az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban! Írja fel a függvény gradiensét az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban! Mekkora szöget zár be a szintvonal érintője a gradienssel?

7. Egy terepasztal felületét az $f(x,y)$ függvénnyel adjuk meg. Adja meg a felületen azokat az $(x,y,f(x,y))$ pontokat, ahol a golyó nyugalomban van, azaz oda letéve, nem mozdul el magától!

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (HF) b) $e^{-(x^2+y^2)}$

   (HF) c) $x^3 + y^3 - 9xy$ d) $x^3y^2(5-x-y)$

8. Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiense az origót kivéve minden pontban párhuzamos az adott pontba mutató helyvektorral! Adjon az előző állításra szemléletes magyarázatot is! Keressen még olyan függvényeket, ahol az origón kívüli pontokban a függvény gradiense párhuzamos a pontba mutató helyvektorral!

9. (HF) Határozzuk meg a $3x^2+2y^2+z^2=9$ egyenletű ellipszoidot az $(1,-1,2)$ pontban érintő sík egyenletét!

10. (HF) Egy terepasztal felületét az $f(x,y)$ függvény adja meg. Tegyük fel, hogy az x tengely kelet felé, az y tengely pedig észak felé mutat. Határozzuk meg a P ponton átmenő, észak-északnyugati irányban induló ösvény meredekségét a P pontban!

    a) $f(x,y)=x^2-y^2 \quad P=(1,2,-3)$

    b) $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \quad P=(1,2,\mathrm{e}^{-5})$

    c) $x^3+y^3-9xy \quad P=(2,0,8)$

11. (HF) Adott felszínű téglák között melyiknek legnagyobb a térfogata?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.