2007 november 23. II. elemző analízis 1. csoport 2007-2008/II. félév

8. feladatsor

1. Legyen $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 4, 4)$, S pedig az a Q-n átmenő sík, amelyik merőleges a PQ szakaszra.

   a) Melyik pontja van az S síknak legközelebb az origóhoz?

   (HF) b) Mutassuk meg, hogy az előbb kapott pontot az origóval összekötő szakasz merőleges az S síkra! Magyarázzuk meg geometriailag is, hogy ez miért van így?

2. Mely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontokban nulla az $f(x, y)$ függvény mindkét parciális deriváltja? Mely pontokban van f-nek lokális szélsőértékhelye? Mely pontokban van f-nek a teljes $\mathbb{R}^2$-en maximuma illetve minimuma?

   a) $f(x, y) = x^2$ b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   (HF) d) $f(x, y) = x^7$ e) $f(x, y) = (x + y)^2$ f) $f(x, y) = x^3 + y^3$

3. a) Írjuk föl $\mathbb{R}^n$-ben annak a hipersíknak az egyenletét, amely az összes koordinátatengelyt az 1-nél metszi!

   b) Adjunk meg olyan függvényt, amelynek ez a hipersík a grafikonja!

4. Tudjuk, hogy $f(1, 2) = 3$, továbbá hogy minden (x, y) pontban $f'_x(x, y) = 0$ és $f'_y(x, y) = 0$. Mennyi lehet $f(5, 10)$?

5. (HF) a) Adott térfogatú téglák között melyiknek legkisebb a felszíne?

   * b) Találjunk frappáns okoskodást, amelynek segítségével le tudjuk vezetni a fenti eredményt és az előadáson vett nyitott dobozos eredményt egymásból!

6. (HF) Írjuk fel azon síkok egyenletét, amelyek a $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ kocka legalább 3 csúcsán átmennek!

7. (HF) Bizonyítsuk be, hogy egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha tartalmazza minden határpontját!

8. (HF) Határozzuk meg az alábbi függvények maximumát, minimumát a megadott halmazokon, és azt is, hogy hol veszi föl ezeket a függvény!

   a) $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ $H = \{(x, y) : 0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1\}$

   b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ $H = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

   c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ $H = \mathbb{R}^2$

   d) $f(x, y) = x - y - 3$ $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

   e) $f(x, y) = \log x \log y + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y$ $H = \{(x, y) : \frac{1}{\mathrm{e}} \le x \le \mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}} \le y \le \mathrm{e}\}$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.