5. feladatsor

1. Ábrázolja az

   a) $(x+y)^2$ b) $\sqrt{x^2+y^2}$ c) xy

   (HF) d) $(x-y)^2$ e) $|x|$ f) $|x+y|$ g) x^2-y^2

   függvények szintvonalait! Készítsen a függvények grafikonjáról térbeli rajzot!

2. Tekintsük a $[0,1]^n$ n-dimenziós kockát, azaz

   $$[0,1]^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \ : \ x_1,\ldots,x_n \in [0,1]\}.$$

   a) Hány csúcsa van?

   b) Mi a középpontja?

   c) Milyen távol vannak a csúcsok a középponttól?

   d) Milyen hosszú szakasz fér el benne?

   e) Keressük meg a legkisebb sugarú gömböt, amelyik tartalmazza!

3. Konvergensek-e a következő pontsorozatok? Ha igen, határozza meg a limeszpontot!

   (a) $a_n \in \mathbb{R}^2$, $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$

   (b) $b_n \in \mathbb{R}^2$, $b_n = (\frac{1}{n}, n)$

   (HF) (c) $c_n \in \mathbb{R}^3$, $c_n = (\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \sqrt[n]{n})$

   (HF) (d) $d_n \in \mathbb{R}^2$, $d_n = \begin{cases} (0, \frac{1}{2^{2n}}), & \text{ha } 2|n \\ (\frac{1}{2^{2n+1}}, 0), & \text{egyébként} \end{cases}$

4. a) Adjuk meg $\mathbb{R}^n$-ben az origó középpontú r sugarú n-dimenziós gömbfelület egyenletét!

   b) A koordinátákra felírt mely egyenlőtlenség jellemzi $\mathbb{R}^n$-ben az origó középpontú r sugarú n-dimenziós nyílt illetve zárt gömb pontjait?

   (HF) c) Hogyan módosulnak a fentiek, ha $(a_1,\ldots,a_n)$ középpontú gömböt nézünk?

5. Ábrázoljuk az $x_k = (\sin(k), \cos(k))$ sorozat pontjait! Van-e a sorozatnak konvergens részsorozata?

6. Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy grafikonjai-e valamilyen kétváltozós függvénynek! Ha igen, akkor adjuk meg a függvényt!

   a) sík b) gömb c) kúppalást (HF) d) henger e) félhenger f) félgömb

7. a) Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben n darab pontot úgy, hogy bármely kettő távolsága épp 1 legyen!

   * b) Meg lehet-e adni így $n+1$ pontot is?

8. (HF) Határozza meg (algebrailag is és geometriailag is) a következő függvények lehetséges legbővebb értelmezési tartományát!

   (a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2+1}$

   (c) $f(x,y,z) = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{x+z} - \frac{z}{x^2-y^2}$

9. (HF) Legyenek $(a,b), (a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots \in \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg a következő állítások logikai kapcsolatát!

   a) **P:** $a_k \to a$ **Q:** $(a_k, b_k) \to (a,b)$

   b) **P:** $a_k \to a$ és $b_k \to b$ **Q:** $(a_k, b_k) \to (a,b)$

10. (HF) Bizonyítsuk be (a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával) a k-szög egyenlőtlenség mindkét alábbi alakját $k > 3$-ra is $\mathbb{R}^n$-ben!

    a) $(\forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n) \qquad |x_1 + \ldots + x_k| \leq |x_1| + \ldots + |x_k|$

    b) $(\forall a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n) \qquad |a_k - a_1| \leq |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_k - a_{k-1}|$

11. (HF) Lásd a 3. oldalon.

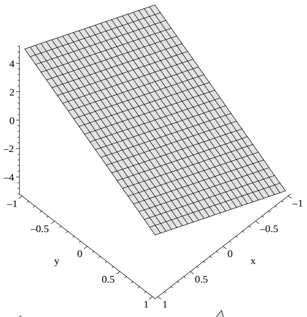
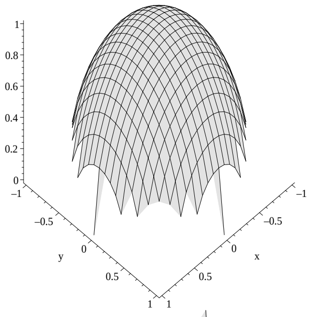
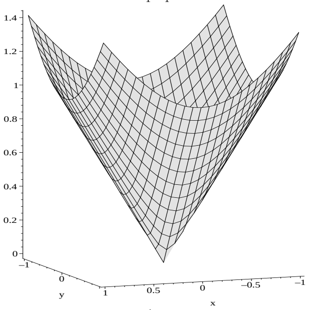
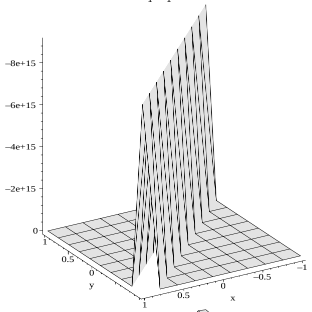
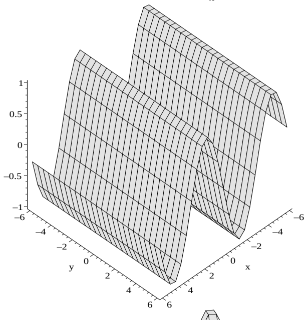
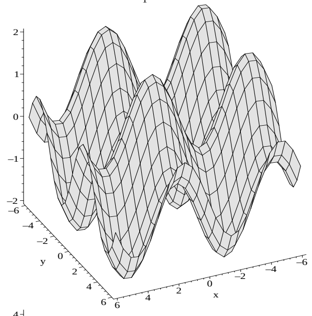
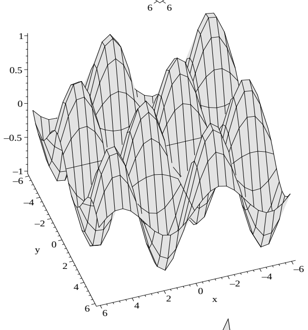
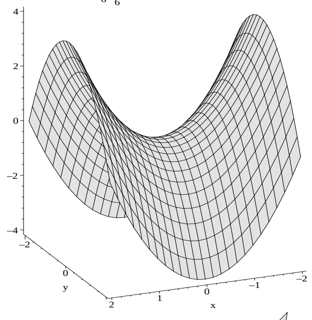
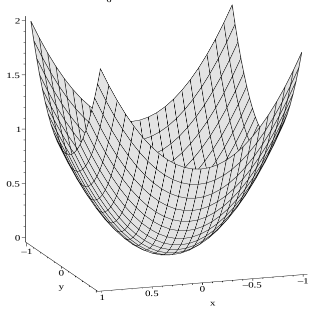
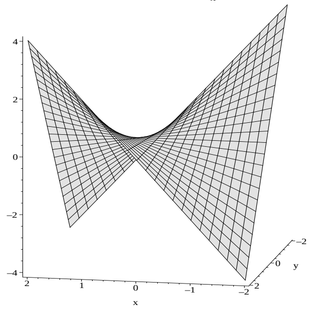
12. (HF) Lásd a 4. oldalon.

11. A következő függvények közül néhánynak kirajzoltuk a térbeli grafikonját. Keresse meg a rajzokhoz tartozó képleteket!

$x - y, \quad x + y, \quad 2x - 3y, \quad x^2 + y^2, \quad (x+y)^2, \quad (x-y)^2, \quad x^2 - y^2, \quad xy, \quad \frac{1}{x+y}$

$\sin x, \quad \sin x + \sin y, \quad \sin x \cdot \sin y, \quad y \cdot \sin x, \quad \sin y$

$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 - \sqrt{x^2 - y^2}, \quad 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad \sqrt{x^2 - y^2}$

12. Keressen olyan függvényeket, amelyek szintvonalait az ábrákon látja!