4. feladatsor

1. Adja meg a következő függvények $a = 0$ körüli Taylor-sorát! Határozza meg a Taylor sor konvergenciatartományát és döntse el, hogy előállítja-e a Taylor sor a függvényt a konvergenciatartományban!

   a) e^{2x} b) e^{-x} c) $\frac{1}{1+x}$ d) $\operatorname{sh} x$ e) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

   (HF) f) $\operatorname{ch} x$ g) $\sin(2x)$ h) e^{-x^2} i) $\cos x$ j) $\frac{x}{1-x}$

   (HF) k) $\cos x^2$ l) $\log(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x$ m) $\frac{x^3}{1+x^4}$ * n) $\sin^2 x$

2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 0-ban akárhányszor differenciálható függvény. Igazak-e a következő állítások?

   (a) f Taylor-sora mindig felírható.

   (b) f Taylor-sora minden valós x helyen konvergens.

   (c) Ha f Taylor-sora konvergens egy x_0 pontban, akkor abban a pontban a Taylor-sor összege $f(x_0)$.

   (d) Ha egy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor előállítja az f függvényt, akkor ez a hatványsor megegyezik f Taylor-sorával.

   (e) Ha $f(x)$ Taylor-sora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor minden valós x esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$.

3. Igazak-e a következő állítások?

   a) $\int\limits_{-0,2}^{0,3} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{-0,2}^{0,3} x^n \, dx \right)$ b) $\int\limits_{-2}^{3} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{-2}^{3} x^n \, dx \right)$

   (HF) c) $\forall x \in \mathbb{R}$−re $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{1-x}$ d) $\forall |x| < 1$−re $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{1-x}$

4. Számítsa ki az $1 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \frac{\pi^{10}}{10!} + - \dots$ összeget!

5. Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$ függvény kielégíti az $f'''(x) = f(x)$ egyenletet!

6. Racionális tagokból álló sor összegeként felírva, majd a sort a részletösszegekkel közelítve, határozza meg az alábbi számok tizedesvessző utáni első két számjegyét!

   a) $\sin 1$ b) $\log 2$ (segítség: $\log 2 = -\log(1 - \frac{1}{2})$) (HF) c) e d) π

7. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát!

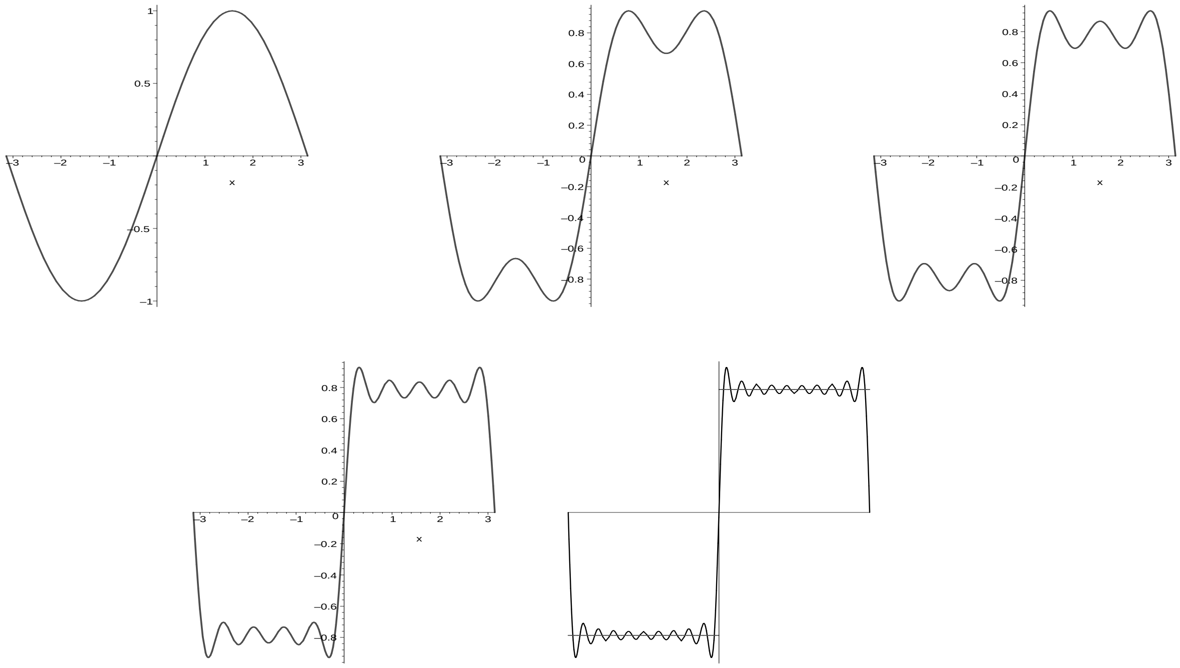
   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+4)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ (HF) c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n \cdot 2^n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x+7)^n$

8. Írja fel a $\Phi(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ függvényt hatványsor alakban! Számítsa ki $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ értékét két tizedesjegy pontossággal!

9. $*$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = ?$

10. $*$ Bizonyítsa be, hogy az e szám irracionális!

11. (HF) A következő ábrákon a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ függvénysor részletösszegeit láthatjuk. A függvénysor konvergens, az utolsó ábrán a limeszfüggvény, a "négyszögjel" is látható. Egyenletesen konvergens-e ez a függvénysor?



12. (HF) A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsort $[-a, 0]$-n integrálva bizonyítsuk be, hogy

    $-\log(1-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ igaz $-1 < a < 0$ esetén is!

13. (HF) Állítsuk elő hatványsor alakban a $\cos\sqrt{x}$ és $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ függvényeket! Hasonlítsuk össze a két hatványsort, majd találjuk ki, miért nem ellentmondás az amit kaptunk!

14. (HF) Konvergensek-e, illetve egyenletesen konvergensek-e $\mathbb{R}$-en a következő függvénysorok?

    a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4+2^n}$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.