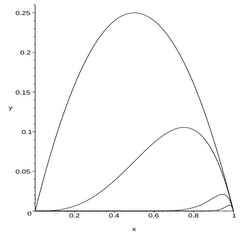
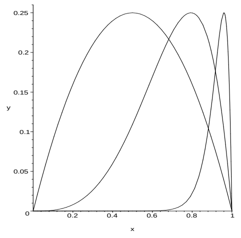
3. feladatsor (módosított verzió)

1. Bizonyítsa be, hogy az $f_n(x) = \cos nx$ függvénysorozat konvergens az $x = 2k\pi \quad (x \in \mathbb{Z})$ pontokban! Konvergens-e a függvénysorozat az $x = (2k+1)\pi \quad (x \in \mathbb{Z})$ pontokban?

2. A rajzokon az $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ függvénysorozat 1., 2., 17. és 120. tagja, illetve az $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ függvénysorozat 1., 3. és 17. tagja látható. Melyik függvényhez konvergálnak a függvénysorozatok a $[0,1]$ intervallumon? Egyenletes-e a konvergencia?

3. Hol konvergensek a következő függvénysorok? Adja meg az összegfüggvényeket!

   a) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$ c) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

   (HF) d) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ e) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 - x^2)^n$

4. Konvergensek-e, illetve egyenletesen konvergensek-e $\mathbb{R}$-en a következő függvénysorok?

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathrm{arctg}(n+1)x - \mathrm{arctg}\,(nx))$ (HF) c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$

5. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát!

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ (HF) b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n n!$

6. Adjunk meg 3 különböző függvénysorozatot úgy, hogy mindhárom függvénysorozat egyenletesen konvergáljon az azonosan 5 függvényhez $[0,1]$-en! Állhatnak-e az előbbi függvénysorozatok csak olyan függvényekből, amelyek nem folytonosak $[0,1]$-en?

7. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 5 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

   Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelynek minden függvénye minden pontban folytonos, és a függvénysorozat az előbbi f függvényhez tart! Lehet-e a konvergencia egyenletes?

8. (HF) Határozzuk meg a következő állítások logikai kapcsolatát!

   a) **P:** $\forall x \in [a,b] \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ **Q:** $[a,b]$-n f_n egyenletesen tart f-hez.

   b) **P:** $[0,1]$-n f_n egyenletesen tart f-hez **Q:** $[0,2]$-n f_n egyenletesen tart f-hez.

   c) **P:** $\forall x \in [a,b] \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 5$ **Q:** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 5$

   d) **P:** $\forall x \in [a,b] \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ **Q:** $\forall x \in [a,b] \quad \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f(x)) = 0$

9. (HF) Legyen $f_n(x) = n^2(x^{n-1} - x^n)$. Bizonyítsuk be, hogy

   a) $\forall x \in [0,1] \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0;$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\; dx \neq 0;$

   c) $[0,1]$-en az f_n függvénysorozat nem tart egyenletesen az azonosan 0 függvényhez.