2007 szeptember 21. II. elemző analízis 1. csoport 2007-2008/II. félév

2. feladatsor

1. (a) $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{2}$. Következik-e ebből, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

   (b) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$. Következik-e ebből, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

   (c) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$. Következik-e ebből, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

   (HF) (d) Lehet-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 2$?

   (HF) (e) Lehet-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$?

   (HF) (f) Lehet-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$?

2. Konvergensek-e a következő sorok?

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ (HF) (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$

   (HF) (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{3})^n$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n+200}{2n+7})^n$

3. Tegyük fel, hogy a $[0, \pi]$ intervallumon $f_n(x) \to \cos x$

   a) pontonként.

   b) egyenletesen.

   Mit mondhatunk ez alapján $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi)$-ről?

4. Milyen x esetén konvergensek a következő függvénysorozatok, azaz mely x értékek esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték? Ahol konvergensek, ott határozzuk meg a limeszfüggvényt!

   (a) $f_n(x) = x^n$ (b) $f_n(x) = \frac{x}{n}$ (c) $f_n(x) = nx$ (d) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$

   (HF) (d) $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ (f) $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ (g) $f_n(x) = \cos(x + \frac{1}{n})$

   (HF) (h) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n$ esetén $a_n > 0$, akkor

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens vagy végtelen.

   (b) $\forall n \quad a_n \le b_n \le c_n$, továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 7$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = 10 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.