2007 április 24. Analízis alapszint I. matematika BSc 1. csoport 2006-2007/II. félév

9. feladatsor

1. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat az előadáson tanult tg $\frac{x}{2}$-es helyettesítéssel!

$$a) \int \frac{dx}{\sin x} \qquad (HF)\ b) \int \frac{dx}{\cos x}$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények megadott felosztásokhoz tartozó alsó és felső összegét!

   a) $f(x) = x^2, \quad \{-1, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ (HF) b) $g(x) = \sin x, \quad \{0, 1, 2, \pi\}$

3. Határozzuk meg közvetlenül a definícióból az alábbi függvények alsó és felső integrálját a megadott intervallumokon, döntsük el, hogy integrálhatóak-e, ha igen, adjuk meg a határozott integrált!

   a) $f(x) = 7 \quad [2, 5]$-n b) $D(x)$ (Dirichlet függvény) $[3, 8]$-n (HF) c) $[x]$ $[0, 2]$-n

4. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat!

$$a) \int \frac{dx}{x^3 + x^2} \quad b) \int \frac{x^9}{x^3 + x^2} dx \quad c) \int \frac{dx}{x^3 + x} \quad d) \int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx \quad e) \int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx$$

5. Integrálható-e a megadott intervallumon?

   a) $\frac{1}{x}$ $(0, 1)$-n b) $e^{\frac{x^2}{2}}$ $[-\sqrt{2}, \sqrt{3}]$-n c) $[x]$ $[-10, 100]$-n
   (HF) d) $D(x)$ $[1, 2]$-n e) $\operatorname{sgn} x$ $[-1, 1]$-n f) $\operatorname{tg} x$ $[0, \pi]$-n

6. Alkalmas felosztássorozat segítségével határozzuk meg az alábbi függvények alsó és felső integrálját a megadott intervallumokon, döntsük el, hogy integrálhatóak-e, ha igen, adjuk meg a határozott integrált!

   a) $f(x) = x \quad [0, 1]$-n (HF) b) $\operatorname{sgn}(x) \quad [-3, 5]$-n c) $xD(x) \quad [0, 1]$-n

   $*d)$ $R(x)$ $[0, 1]$-n, ahol R a Riemann függvény: $R(x) = \begin{cases} 1/q & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \\ 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

7. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét! (Segítség: keressünk mindegyiknél olyan függvényt és intervallumot, amelyre a sorozat tagjai épp az intervallumon vett határozott integrálok közelítőösszegei!)

$$a) \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = ? \qquad (HF)\ b) \lim_{n \to \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6} = ?$$

8. Bizonyítsuk be az alábbi trigonometrikus azonosságokat!

$$a)\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad (HF)\ b)\ \sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$(HF)\ c)\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} \qquad d)\ \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

9. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat a megadott helyettesítések segítségével!

$$a)\ \int \frac{dx}{2^x+4^x},\quad t=2^x \qquad (HF)\ b)\ \int \frac{dx}{1+\sin^2 x},\quad t=\mathrm{tg}\, x$$

10. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálokat!

$$a)\ \int_0^{\pi} \sin x\,dx \qquad b)\ \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \qquad c)\ \int_{-1}^3 \frac{1}{x}\,dx \qquad (HF)\ d)\ \int_2^3 x^2\,dx \qquad e)\ \int_{-1}^3 \frac{1}{2x+3}\,dx$$

$$(HF)\ f)\ \int_3^4 \frac{x^3}{x^2-4}\,dx \qquad g)\ \int_0^1 \frac{x^3}{x^2-4}\,dx \qquad h)\ \int_1^3 \frac{x^3}{x^2-4}\,dx \qquad i)\ \int_3^7 x^2\log x\,dx$$

$$j)\ \int_1^2 \frac{5^{2x}}{1+5^x}\,dx \qquad k)\ \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin x-\cos x} \qquad l)\ \int_0^{100} \{x\}\,dx \qquad m)\ \int_1^2 \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,dx$$

$$n)\ \int_{-3}^{-2} \frac{x^3+1}{x^4+x^2}\,dx \qquad o)\ \int_{-3}^{-2} \frac{3x^2}{x^2-2x+6}\,dx \qquad p)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{ctg}\, x\,dx \qquad q)\ \int_{-2}^{2} x^3 e^{x^2}\,dx$$

11. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha $[a,b]$-n f integrálható, továbbá $m \le f(x) \le M$ minden $x \in [a,b]$-re, akkor

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\ !$$

12. (HF) a) Mekkora a területe a $\cos x$ függvény egy "hupli"-jának, azaz két szomszédos nullhely között a függvénygrafikon és az x-tengely közötti tartománynak?

b) Milyen arányban osztja két részre az $y=x^2$ parabola a $[0,1]\times[0,1]$ négyzet területét? És a $[0,10]\times[0,100]$ négyzet területét?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.