

8. feladatsor

1. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat a javasolt helyettesítésekkel!

$$a) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad t = e^x \qquad b) \int \frac{dx}{\cos x}, \quad t = \sin x$$

$$c) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin t \qquad (HF) d) \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} dx, \quad t = \sqrt{x+1}$$

$$(HF) e) \int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^3} dx, \quad t = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \qquad f) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x = \sin^2 t$$

2. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat alkalmas helyettesítésekkel!

$$a) \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx \qquad (HF) b) \int \frac{e^x+2}{e^x+e^{2x}} dx \qquad c) \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$$

3. Határozzuk meg (parciális integrálással) a következő határozatlan integrálokat!

$$a) \int x \operatorname{arctg} x dx \qquad b) \int e^x \sin x dx$$

4. Helyes-e a következő parciális integrálás?

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} dx = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} dx$$

5. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat!

$$a) \int (3\sqrt[4]{x} + 2) dx \qquad b) \int \sin x \cdot \cos^{2007} x dx \qquad c) \int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$d) \int 3^{-2x} dx \qquad e) \int \operatorname{ctg} x dx \qquad f) \int \sqrt{2-x^2} dx$$

$$g) \int \sqrt{2-x} dx \qquad h) \int 2x \sin(x^2+1) dx \qquad i) \int \cos x e^{\sin x} dx$$

6. (HF) a) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

b) Ellenőrizzük (deriválással), hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + C !$

c) Ezek szerint $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ csak konstansban térnek el?

d) Ha igen, akkor mi a konstans; ha nem, akkor ez miért nem mond ellent a tanultaknak?

7. (HF) Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{lll}
 a) \int (e^{-3x} - 2 \sin(3x-2)) dx & b) \int \frac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} dx & c) \int (2x+2)(x^2+2x)^{222} dx \\
 d) \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx & e) \int 4^{5x+6} dx & f) \int \frac{\log^2 x}{x} dx \quad g) \int \frac{1+x}{1+x^2} dx \quad h) \int \frac{1+x^2}{1+x} dx \\
 i) \int \frac{4x+4}{\sin^2(x^2+2x+1)} dx & j) \int \frac{1}{(1+x^2) \arctg x} dx & k) \int x^2 \log x dx \\
 l) \int \frac{x}{\sin^2(4+9x^2)} dx & m) \int \cos x \sin x dx & n) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2 dx \\
 o) \int \frac{4}{5+6x^2} dx & p) \int \frac{3}{(x+3)(x-2)} dx & q) \int \frac{4}{x^2-x-6} dx \quad r) \int \frac{4}{x^2-2x+6} dx
 \end{array}$$

8. (HF) Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sin \frac{5}{n})}{\log(\sin \frac{9}{n})} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\log x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{xe^{\sin x}}$$

9. (HF) Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty \quad (\text{ha } a > 1, n = 1, 2, \dots) !$$

10. (HF) Végezzük el az x^x teljes függvényvizsgálatát!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.