

6. feladatsor

1. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$a) \frac{|\arctg x - \arctg y|}{|x - y|} \leq 1 \quad (\text{ha } x \neq y) \quad b) |\arctg x - \arctg y| \leq |x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$(HF) \quad c) |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$d) |\tg x - \tg y| \geq |x - y| \quad (\text{ha } x, y \in (-\pi/2, \pi/2))$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és f' -nek n gyöke van, akkor f -nek legfeljebb $n + 1$ gyöke van!

3. Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli nulladik, első, második, harmadik valamint n -edik Taylor polinomját!

$$a) e^x \quad (HF) \quad b) e^{-x} \quad c) 2x^2 - 3x + 4 \quad d) \operatorname{sh} x \quad e) \operatorname{ch} x$$

$$f) \sin x \quad g) \cos x \quad h) \frac{1}{1-x} \quad i) \log(1+x)$$

4. Határozzuk meg a $2x^2 - 3x + 4$ függvény 1 körüli nulladik, első, második, harmadik valamint n -edik Taylor polinomját!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \geq 0$ -ra

$$a) e^x \geq 1 \quad b) e^x \geq 1 + x \quad c) e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Találjuk ki és bizonyítsuk be a hasonlóan adódó d), e), f),... egyenlőtlenségeket is!

6. Hány gyöke van a következő egyenleteknek?

$$a) e^x = x + 3$$

$$(HF) \quad b) x^5 - 5x + 2 = 0$$

7. Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata?

$$a) \mathbf{A}: f(x) \text{ állandó} \quad \mathbf{B}: f'(x) = 0$$

$$b) \mathbf{A}: f(x) = x \quad \mathbf{B}: f'(x) = 1$$

$$(HF) \quad c) \mathbf{A}: f(a) = f(b) \quad \mathbf{B}: \exists x_0 \in (a, b), \text{ amelyre teljesül, hogy } f'(x_0) = 0$$

$$d) \mathbf{A}: f(x) \text{ lineáris (azaz } ax + b \text{ alakú)} \quad \mathbf{B}: f'(x) \text{ állandó}$$

$$e) \mathbf{A}: f(x) = e^x \quad \mathbf{B}: f'(x) = f(x)$$

8. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctg(x+1) - \arctg x) = ?$

$$(HF) \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})) = ?$$

9. (HF) Bizonyítsuk be, hogy egy n -edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke van!
10. (HF) Bizonyítsuk be, hogy minden $x \geq 0$ -ra
 a) $\sin x \leq x$ b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ c) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$
 Találjuk ki és bizonyítsuk be a hasonlóan adódó d), e), f),... egyenlőtlenségeket is!
11. (HF) Számítsuk ki a következő határértékeket!
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^e - 1}{x\sqrt{2} - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{(2/3)^x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{\log(x - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
12. (HF)
 Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!
 a) $\int \sin x \, dx$ b) $\int \sin(x + 3) \, dx$ c) $\int \cos(4x - 2) \, dx$
 d) $\int (1 + x + 5x^2) \, dx$ e) $\int \sqrt{x} \, dx$ f) $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.