

4. feladatsor

1. Mekkora lehet legalább illetve legfeljebb egy 1 átfogójú derékszögű háromszög
 - a) kerülete? (HF) b) területe?
2. Határozzuk meg a következő függvények inverzeinek a deriváltját a megadott helyeken!
 - a) $x^5 + x^2$, $a = 2$ (HF) b) $3x^3 + 2x$, $a = -5$
 - (HF) c) $e^x + x$, $a = 1$ d) $\sin x - x$, $a = 1 - \frac{\pi}{2}$
3. Deriváljuk a következő függvényeket!
 - a) 3^x b) $\sqrt[3]{\sin^{\frac{7}{5}} x + \cos x^{\frac{7}{5}}}$ c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
 - d) $\arctg \frac{1+x}{1-x}$ e) $\log_3 x$ f) $\log_x 3$ g) x^x
 - (HF) h) e^x i) $\arctg(\sin \sqrt{x})$ j) $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ k) $\pi^{\arcsin \frac{x+1}{x-1}}$
 - l) $(\sin x)^{\cos x}$ m) $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$ n) $\frac{5x^2 \log_7 x + \log_x 6}{\sqrt[3]{\sin^{\frac{4}{3}} x + \cos x^2}}$
4. Határozzuk meg a következő állításpárok logikai kapcsolatát, azaz hogy melyikből következik a másik!
 - a) **A:** f lokálisan nő x_0 -ban **B:** x_0 -nak van olyan környezete, ahol f monoton nő
 - b) **A:** $f'(x_0) = 0$ **B:** f -nek lokális minimuma vagy lokális maximuma van x_0 -ban
5. Határozzuk meg a következő függvények abszolút szélsőértékeit és értékkészletét a megadott intervallumokon!
 - a) $\frac{x^3 - 9x}{10}$, $[-10, 4]$, $[-10, 0]$
 - (HF) b) $\sin x + \cos x$ $[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi]$
 - (HF) c) $2\arctg x - x$ $[0, 10]$, $[-10, 10]$
6. A következő függvények közül melyiknek van lokális minimuma, szigorú lokális minimuma, lokális maximuma, szigorú lokális maximuma 0-ban? Melyikre igaz, hogy 0-ban lokálisan nő, szigorúan lokálisan nő, lokálisan csökken, szigorúan lokálisan csökken? (Ez összesen 8 kérdés mindegyik függvényre.)
 - a) x^3 b) x^2 c) c konstans
 - d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & \text{ha } x \neq k\pi \\ 0, & \text{ha } x = k\pi \end{cases}$ e) $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$
 - (HF) f) $-x^3$ g) $-|x^3|$ h) $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$
 - i) $i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ j) Dirichlet függvény: $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

7. Legyen f differenciálható \mathbb{R} -en. Határozzuk meg a következő állításpárok logikai kapcsolatát!
- (a) **A:** $f'(a) > 0$ **B:** f lokálisan nő a -ban
 (b) **A:** $f'(a) > 0$ **B:** f lokálisan szigorúan nő a -ban
 (c) **A:** $f'(a) \geq 0$ **B:** f lokálisan nő a -ban
 (d) **A:** $f'(a) \geq 0$ **B:** f lokálisan szigorúan nő a -ban
8. Határozzuk meg egy adott V térfogatú egyenes körhenger alapkörének R sugarát és m magasságát úgy, hogy a henger felszíne minimális legyen!
9. (HF) Mekkora téglalap alakú kertet lehet egy hosszú egyenes fal mellett elkeríteni 100 méter hosszú kerítéssel?
10. (HF) Pisti egy 100m sugarú kör alakú tó partján áll és át akar jutni az átellenes pontra. Úszik egy húr mentén, majd onnan gyalog megy. Milyen szögben indulva ér át a leghamarabb, ha 1m/s sebességgel úszik és 2 m/s sebességgel gyalogol?
11. (HF) Mekkora lehet a kerülete egy olyan háromszögnek, amelynek egyik oldala és az oldalhoz tartozó magasság egyaránt 1 hosszú? És a területe?
12. (HF) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mindenütt folytonos és az egyetlen zérushelye az $x = 0$.
- a) Lehet-e f -nek 0-ban szigorú lokális minimuma?
 b) Lehet-e f -nek 0-ban szigorú lokális maximuma?
 c) Lehet-e f 0-ban szigorúan lokálisan növekedő?
 d) Lehet-e f 0-ban szigorúan lokálisan csökkenő?
 e) A fenti négy tulajdonságból hány teljesülhet egyszerre (Lehet-e, hogy 0? Lehet-e, hogy pont 1?, ..., Lehet-e, hogy mind a 4?)
 f) És ha nem tesszük fel, hogy f egyetlen zérushelye az $x = 0$?
13. (HF) Adjunk deriválási szabályt négyszeresen összetett függvényekhez! Adjuk meg a szabály feltételeit is!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.