2007 május 3. Analízis alapszint I. matematika BSc 1. csoport 2006-2007/II. félév

10. feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a)\ \int_3^\infty 2^{-x}dx \qquad b)\ \int_0^1 \frac{dx}{x-1} \qquad c)\ \int_0^\infty \sin x\ dx$$

$$(HF)\ d)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x^3} \qquad e)\ \int_0^7 \frac{dx}{x^3} \qquad f)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad g)\ \int_{-\infty}^0 e^x dx \qquad h)\ \int_0^1 \log x\ dx$$

$$i)\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\ dx \qquad j)\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad k)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad l)\ \int_1^2 \frac{dx}{x\log x} \qquad m)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$$

$$(Gy)\ n)\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\log x} \qquad o)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log x} \qquad p)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \qquad q)\ \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \qquad r)\ \int_0^\infty x^2\ dx$$

2. Egy légy az origóból indulva repked úgy, hogy t másodperc múlva a $(\frac{t^2}{2}, \frac{4t\sqrt{t}}{3}, 2t)$ koordinátájú pontban van (méterben kifejezve).

   a) Határozzuk meg, hogy t másodperc múlva mi a sebességvektora és mi a sebességének a nagysága!

   b) Határozzuk meg az első 4 másodpercben megtett utat, valamint az elmozdulást!

3. Forgassuk meg a következő függvények grafikonjait az x tengely körül a megadott intervallumokban! Írjuk fel a kapott forgástestek pontjainak halmazát $\{(x, y, z) \ : ...\}$ alakban! Számítsuk ki a keletkezett forgástestek térfogatát!

   (a) e^{-x} $[0, 1]$ (HF) (b) $\sqrt{x}$ $[0, 1]$ (Gy) (c) $\sin x$ $[0, \pi]$ (d) $\frac{1}{x}$ $[1, 4]$

4. Mekkora az alábbi görbék által közrefogott síkidom területe?

   a) $y = x^2$ és $y = -x + 2$ b) $3x + 2y - 21 = 0$, $x - y + 3 = 0$ és $x - 6y + 13 = 0$

   (HF) c) $y^2 = 2(x - 4)$ és $x = 5$ d) $y = \sin^2 x$ és $y = 0$ (Gy) e) $y = -x^2 + 3$ és $y = 0$

   (Gy) f) $y = -x^2 + 2x$ és $x + y = 0$ g) $y = x^3 + 3x^2$ és $y = x + 3$

5. Az alábbi improprius integrálokról döntsük el, hogy konvergensek vagy divergensek!

$$a)\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \qquad b)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \qquad c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \qquad d)\ \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$(HF)\ e)\ \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx \qquad f)\ \int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+x}dx \qquad g)\ \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx \qquad h)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}dx$$

$$(Gy)\ i)\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \qquad j)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \qquad k)\ \int_0^\infty xe^{-x^2}dx \qquad l)\ \int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$$

6. Adjunk heurisztikus (geometriai) magyarázatot arra, hogy miért egyezik meg az 1/g és 1/h feladatokra kapott válaszok abszolút értéke!

7. a) Bizonyítsuk be, hogy a b szélességű, h magasságú parabolaszelet területe $\frac{2}{3}bh$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy a T alapterületű, m magasságú forgásparaboloid térfogata $\frac{1}{2}Tm$.

   c) Határozzuk meg (integrál segítségével) egy r sugarú h magasságú körszelet területét!

   d) Határozzuk meg (integrál segítségével) egy r sugarú h magasságú gömbcikk térfogatát!

   (Gy) e) Bizonyítsuk be, hogy a T alapterületű, m magasságú kúp térfogata $\frac{1}{3}Tm$.

8. Számítsuk ki a következő függvénygrafikonok ívhosszát a megadott intervallumokon!

   a) $\mathrm{ch}x \quad [-1,1]$ (Gy) b) $\log(\cos x) \quad [0,\frac{\pi}{4}]$ * c) $\sqrt{x} \quad [0,1]$

9. A logaritmikus spirál a $(0,1)$ pontból indulva úgy kerülgeti az óramutató járásával ellentétes irányban az origót, hogy (radiánban) φ szögű elfordulás után $e^{-\varphi}$ távolságban van az origótól.

   a) Rajzoljuk le a logaritmikus spirált és mutassuk meg, hogy $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in [0,\infty)$ egy paraméterezése!

   b) Írjuk fel a logaritmikus spirál ívhosszát improprius integrál segítségével, majd az improprius integrál kiszámításával határozzuk is meg az ívhosszt!

10. Egy 3 méter hosszú, $10\mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű rúd sűrűsége az egyik végpontjától mért távolsággal arányosan nő: $\rho(x) = 2700 + 100x\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Mennyi a rúd tömege?

11. Egy anyagi pont az x tengelyen x_1-ből x_2-be mozdul ($x_1 < x_2$) miközben x-ben $F(x)$ erő hat rá az elmozdulás irányában ($F(x)$ negatív, ha az erő az elmozdulás irányával ellentétes). Heurisztikus okoskodással adjunk képletet (határozott integrál alakban) az erő által végzett munkára!

    (Fizika óráról tudjuk, hogy állandó erő esetén az erő által végzett munkát az "erő szorozva elmozdulás" képlet adja meg, ha az erő az elmozdulás irányában hat.)

12. a) Mekkora munka szükséges ahhoz, hogy egy m tömegű rakétát az M tömegű R sugarú Föld felszínéről (sugárirányban)d magasságba emeljük?

    b) És, hogy a Földtől végtelen távolságba vigyük?

    (Fizika óráról tudjuk, hogy egy m és egy M tömegű test közötti gravitációs erő nagysága $F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{d^2}$, ahol d a két tömegközéppont távolsága, γ pedig egy ismert állandó.)

    (A válaszokat természetesen a fenti mennyiségek segítségével kell kifejezeni.)

13. (Gy) Egy rugó összenyomásához szükséges erő arányos a rugó rövidülésével. Mekkora munkát végzünk, ha 30 cm-rel nyomjuk össze azt a rugót, amelyet 1 cm rövidüléshez 25 N-nal kell összenyomni?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.