9. feladatsor

1. Írjuk fel az Arkhimédeszi és a Cantor axióma tagadását!

2. Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét!

   $a)\ I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ $\quad b)\ I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\quad c)\ I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ $\quad d)\ I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

   $(HF)\quad e)\ I_n = \left[2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$ $\quad f)\ I_n = \left(2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right)$ $\quad g)\ I_n = \left[2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right)$

   $(HF)\quad h)\ I_n = [-5+n, 3+n)$ $\quad i)\ I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$ $\quad j)\ I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra $|a| - |b| \le |a-b| \le |a| + |b|$!

4. Bizonyítsuk be az alábbiakat tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ halmazokra!

$$a)\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad b)\ (HF)\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

5. (HF) Szemléltessük a következő halmazokat számegyenesen! Döntsük el, hogy melyik intervallum, és melyik nem az! Az intervallumok esetében döntsük el, hogy melyik zárt, melyik nyílt, és melyik se nem zárt, se nem nyílt!

$$a)\ A = \{1,2,3\} \qquad b)\ B = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\} \qquad c)\ C = \{\sqrt{2}\} \qquad d)\ D = \{x \in \mathbb{N} : 2 \le x \le 6\}$$

$$e)\ E = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 6\} \qquad f)\ F = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \le 6\} \qquad g)\ G = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x < 6\}$$

$$h)\ H = \{x \in \mathbb{Q} : 2 \le x \le 6\} \qquad i)\ I = [-3,8] \qquad j)\ J = (-3,8) \qquad k)\ K = (-3,8]$$

6. (HF) Határozzuk meg az $f(x) = 8 - |x+17|$ függvény minimumát és maximumát (ha van), valamint azt is, hogy ezen értékeket hol veszi fel f !

7. (HF) Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

$$(i)\ x \in A \vee x \in B \qquad (ii)\ x \in A \cap B$$

8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$!

9. (HF) Hol van és mennyi a minimuma az alábbi függvénynek, ha $x > 0$?

$$a)\ f(x) = x + \frac{4}{x} \qquad b)\ g(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x} \qquad c)\ h(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

10. (HF) Igaz-e tetszőleges A, B, C, D halmazokra, hogy

$$a)\ (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B\ ? \qquad b)\ (A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (B \setminus A) \cup (C \setminus B)\ ?$$

$$c)\ (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (B \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (A \setminus C)\ ?$$

$$d)\ (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus D) \cup (D \setminus A) = (B \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (D \setminus C) \cup (A \setminus D)\ ?$$

11. (HF) Tudjuk, hogy három pozitív szám szorzata 1.

    a) Mennyi lehet legalább a reciprokösszegük?

    b) Mennyi lehet legfeljebb a reciprokösszegük?

12. (HF) A $H = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ halmazon vegyük a moduló n összeadást illetve szorzást.

    a) Ellenőrizzük le, hogy így testet kapunk, ha n prímszám!

    b) Mutassuk meg, hogy nem testet kapunk, ha n nem prímszám!

    c) Mely axiómák teljesülnek és melyek nem, ha n nem prímszám?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.