7. feladatsor

1. Bizonyítsuk be (precízen), hogy tetszőleges A, B, C halmazokra
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
2. Hol van és mennyi a minimuma az $f(x) = x + \frac{3}{x}$ függvénynek?
3. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re $9 | n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$!
4. * Egy 1024×1024-es sakktábla egyik saroknégyzetét kivágtuk. Bizonyítsuk be, hogy a maradék lefedhető 3 kis négyzetből álló L alakú dominókkal!
5. (HF) Igaz-e tetszőleges A és B halmazokra, hogy
$$a)\ A \setminus B = A \cap \overline{B}\ ? \qquad b)\ (A \cup B) \setminus B = A\ ? \qquad c)\ (A \setminus B) \cup B = A\ ?$$
Amelyik nem igaz, ott döntsük el, hogy igaz-e valamelyik tartalmazás, azaz hogy igaz állítást kapunk-e (minden A, B halmazpárra), ha $=$ helyett $\subset$-t vagy $\supset$-t írunk!

   A válaszokat precízen bizonyítsuk!
6. (HF) Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Írjuk fel az alábbi állításokat logikai formulákkal, írjuk föl a tagadásukat, továbbá adjunk példát (ha van) olyan H-ra amelyikre teljesül és olyanra is amelyikre nem!

   a) H-nak van legkisebb eleme.

   b) H bármely két eleme között van H-beli elem.
7. (HF) Adjunk meg olyan n_0-t, amelyre minden $n > n_0$-ra fennáll az alábbi becslés!
$$a)\ 1,00001^n > 1000 \qquad b)\ 0,9999^n < 0,0001 \qquad c)\ \sqrt[n]{2} < 1,00001$$
8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c nemnegatív valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!
$$a)\ \sqrt[n+1]{ab^n} \le \frac{a+nb}{n+1} \qquad b)\ a^2b + b^2c + c^2a \ge 3abc$$
9. (HF)
$$a_1 = 3,\ a_2 = 15,\ (\forall n)\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \implies a_n = ?$$

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.