6. feladatsor

1. Mi ez a halmaz?
   a) $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5\}$
   b) $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 2 \Longrightarrow x^2 < 4\}$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

$$a)\ a + \frac{1}{a} \geq 2 \qquad b)\ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \qquad c)\ n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

3. Legyen H valós számok egy halmaza. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?
   a) $(\exists x)\ (x \in H)$
   b) $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$
   c) $(\forall x \in H)(\forall y \in H)(\forall z \in \mathbb{R})\ (x < z < y \Longrightarrow z \in H)$

4. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül)
   a) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!
   b) a prímszámok halmazát!

5. * Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$\frac{1}{2n-1} \leq \sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n}\ !$$

6. (HF) a) Vannak-e olyan $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egész számok, amelyekre

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}\ ?$$

   b) Mely $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egész számokra igaz, hogy

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}\ ?$$

7. (HF) Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}\ : 0 \leq x \leq 1\}$ és $B = \{y \in \mathbb{R}\ : 0 \leq y \leq 2\}$. Igaz-e, hogy

   a) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ x \geq y$? *b)* $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ x \leq y$? *c)* $(\exists y \in B)(\forall x \in A)\ x \geq y$?

   d) $(\exists y \in B)(\forall x \in A)\ x \leq y$? *e)* $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \geq y$? *f)* $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \leq y$?

   g) $(\exists x \in A)(\exists y \in B)\ x \geq y$? *h)* $(\exists x \in A)(\exists y \in B)\ x \leq y$? *i)* $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\ x \geq y$?

8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n-2)}{6}\ !$$

9. (HF) Bizonyítsuk be a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $n = 2$ speciális esetben!

10. (HF) Bizonyítsuk be, hogy $u_n \geq \frac{1{,}6^n}{3}$, ahol u_n jelöli az n. Fibonacci számot!

11. (HF) Az 1 m^3-es téglák közül melyiknek legkisebb a felszíne?

12. (HF) Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amelyre igaz minden $n > n_0$ esetén az alábbi egyenlőtlenség!

$$a)\ n^2 > 1000n + 100 \qquad b)\ n^3 > n^2 + n + 1$$