5. feladatsor

1. Egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot az alábbi rekurzióval adtak meg: $a_1 = 1$, $(\forall n)\ a_{n+1} = 2a_n + 1$. Adjunk képletet az n-edik tagra!

2. Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amelyre igaz minden $n > n_0$ esetén az alábbi egyenlőtlenség!

$$a)\ 1,1^n > n \qquad b)\ 0,9^n < \frac{1}{n} \qquad c)\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,1$$

$$\text{(HF)}\quad d)\ \sqrt{n+3} - \sqrt{n} < 0,01 \qquad e)\ \sqrt{n^2+5} - n < 0,001$$

3. $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy sorozata. Mi következik az alábbiakból?
   a) A_{100} igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   b) A_{100} igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis.
   c) A_1 és A_2 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.
   (HF) d) A_1 hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   (HF) e) A_1 igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.
   (HF) f) A_1 igaz. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mind igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   (HF) g) A_1 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.
   (HF) h) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz. A_{2^n} hamis minden n-re.

4. a) Találjuk ki a négyzetes közép definícióját!
   (HF) b) Bizonyítsuk be, hogy a többi középre az előadáson szereplő három tulajdonság a négyzetes középre is igaz!

5. Bizonyítsuk be, hogy $u_n < 1,7^n$ minden n-re, ahol u_n az n-edik Fibonacci szám!

6. Milyen egyenlőtlenség írható a "?" helyére, hogy igaz legyen minden pozitív egész n-re és nemnegatív valós b-re, hogy

$$(1+b)^{\frac{1}{n}} \quad ? \quad 1 + \frac{b}{n}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re

$$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\ !$$

8. * "Tétel: Minden ló egyszínű.
   Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n.$ is egyszínű és a $2., \ldots, n., (n+1).$ is egyszínű, tehát mind az $n+1$ egyszínű."
   Jó ez? Ha nem, akkor hol a hiba?

9. (HF) H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mit jelentenek a következő állítások?
   a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad y < x$
   b) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad y < x$
   c) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad y \le x$
   d) $\exists y \in H \quad \forall x \in H \quad y \le x$

10. (HF) Bizonyítsuk, be hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ !$$

11. (HF) Fogadjuk el igaznak, hogy
    (1) Ha egy állat emlős, akkor vagy van farka, vagy van kopoltyúja.
    (2) Egyik állatnak sincs farka.
    (3) Minden állat emlős, vagy van farka, vagy van kopoltyúja.
    Következik-e mindebből, hogy minden állatnak van kopoltyúja?