4. feladatsor

1. Ádámnak 2 füle volt. Ha egy apának 2 füle van, akkor a fiának is 2 füle van.

   a) Következik-e ebből a két állításból, hogy minden ma élő embernek 2 füle van?

   b) Kikről tudjuk biztosan állitani a fenti két állítás alapján, hogy 2 fülük van?

   c) Mire következtethetünk, ha a két állításból az elsőt elhagyjuk, és csak a másodikat használjuk fel?

   d) Mire következtethetünk, ha a két állításból a másodikat elhagyjuk, és csak az elsőt használjuk fel?

2. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$!

3. Írjuk fel a következő kifejezéseket $n = 1, 2, 3, 5, k$ és $k+1$ esetén:

   a) $\sqrt{n}$

   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

   c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

   d) (HF) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$

   e) (HF) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)$

   f) (HF) $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \cdots + n(3n+1)$

4. Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L,F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán tá ncolt az F fiúval. Fordítsuk le emberi nyelvre az összes alábbi állítást! Minden egy sorban lévő állításpárnál döntsük el, hogy van-e különbség a két állítás között, következik-e valamelyikből a másik, ekvivalensek-e?

   a) (i) $(\forall L)(\exists F)\ T(L,F)$ (ii) $(\exists F)(\forall L)\ T(L,F)$

   b) (i) $(\exists L)(\exists F)\ T(L,F)$ (ii) $(\exists F)(\exists L)\ T(L,F)$

   c) (HF) (i) $(\forall L)(\forall F)\ T(L,F)$ (ii) $(\forall F)(\forall L)\ T(L,F)$

5. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy minden pozitív egész n-re $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$!

6. Az első néhány tag kiszámítása után sejtsük meg, milyen egyszerűbb kifejezéssel egyenlő az alábbi összeg, majd a sejtést bizonyítsuk be teljes indukcióval!

   a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} \cdots \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

   b) (HF) $1 + 3 + \ldots + (2n-1)$

7. * Bizonyítsuk be, hogy véges sok egyenes a síkot mindig olyan tartományokra osztja, melyek kiszínezhetőek két színnel úgy, hogy azonos színű tartományoknak nincs közös határvonaluk!

8. (HF) Igaz-e, hogy ha

   a) a és b racionális számok, akkor $a+b$ is racionális?

   b) a és b irracionális számok, akkor $a+b$ is irracionális?

   c) a racionális szám, b pedig irracionális, akkor $a+b$ racionális?

   d) a racionális szám, b pedig irracionális, akkor $a+b$ irracionális?

9. (HF) Írjuk fel az alábbi állítások tagadását!

   a) $(\exists x)\ x = 2$ b) $((\forall x)\ A(x))\ \vee\ ((\exists y)\ B(y))$

   c) $(\forall \varepsilon)(\exists \delta)\ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$

10. (HF) Hozzuk ki a Bernoulli egyenlőtlenségből is, hogy minden pozitív egész n-re $2^n > n$!

11. (HF) Keressünk olyan N számot, amelyre minden $n > N$ egész szám esetén $2^n > n^3$!

12. (HF) Egy gazdának van egy pár újszülött nyula. Minden nyúlpár 2 hónapos korától minden hónapban egy újabb párnak ad életet. Hány pár nyula lesz n hónap múlva?