

21. feladatsor

1. Van-e minimuma, van-e maximuma az alábbi függvényeknek az alábbi halmazokon?
 - a) x^2 $(-1, 2)$ -n b) $x^7 - 555x^3 + 100x$ $[-77, e^{99}]$ -en
 - (HF) c) x^2 $(0, 2)$ -n d) x^2 $[0, 2]$ -n e) $\sqrt{x} + 10x^2 - x^3$ $[3, 33]$ -n f) $x^5 + 33x^2 + \sqrt{x}$ $(3, 33)$ -n
2. Mi a következő állítaspárok logikai kapcsolata?
 - a) **A:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ **B:** $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 5$
 - (HF) b) **A:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ **B:** $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$
 - c) **A:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$ **B:** $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 5$
 - (HF) d) **A:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ **B:** $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \infty$
3. Bizonyítsuk be, hogy minden 3-adfokú polinomnak van valós gyöke!
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a, b]$ -n folytonos f függvény esetén f $([a, b])$ korlátos zárt intervallum!
5. f, g folytonosak $[a, b]$ -ben, továbbá $f(a) \geq g(a)$ és $f(b) \leq g(b)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = g(c)$!
6. f, g folytonosak $[a, b]$ -n, és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) < g(x)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c > 0$ szám, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) - f(x) \geq c$!
7. (HF) f folytonos $(0, 1)$ -en. Következik-e ebből, hogy f -nek van maximuma és minimuma $(0, 1)$ -en?
8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy minden a nemnegatív számhoz és k pozitív egészhez van olyan b nemnegatív szám, amelyre $b^k = a$!
9. (HF) f folytonos $[0, 1]$ -en, és $f(0) = 0, f(1) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [0, 1]$, amelyre $f(c) = c$!
10. (HF) Van-e olyan függvény, amelyik
 - a) szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0)$ -ban, szigorúan monoton nő $(0, \infty)$ -en, és 0-ban nincs minimuma?
 - b) monoton csökken $(-\infty, 0]$ -ban, monoton nő $[0, \infty)$ -en, és 0-ban nincs minimuma?
 - c) nem korlátos $[0, 1]$ -en?
 - d) korlátos $[0, 1]$ -en, de nincs sem maximuma, sem minimuma $[0, 1]$ -en?
 - e) pozitív \mathbb{R} -en, de nincs minimuma?
 - f) $[0, 1]$ -en minden $f(0)$ és $f(1)$ közötti értéket felvesz, de nem folytonos $[0, 1]$ -en ?
 - g) nem folytonos $[0, 1]$ -en, de $[0, 1]$ -en van maximuma is és minimuma is?