

20. feladatsor

- Írjuk fel logikai jelekkel, hogy egy f függvény nem folytonos az x_0 pontban!
- a) Döntsük el, hogy konvex-e illetve konkáv-e a \sqrt{x} függvény a $[0, \infty]$ intervallumban!
b) Írjuk fel a megfelelő Jensen-egyenlőtlenséget $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ súlyokkal!
- a) Írjuk fel az x^{10} függvény $[a, b]$ fölötti húrjának egyenletét!
b) Bizonyítsuk be, hogy $x^{10} \leq 1023x - 1022$ minden $x \in [1, 2]$ -re!
- Mely pontokban folytonosak az alábbi függvények?
a) $-2x$ b) Dirichlet függvény c) $\{x\}$ d) \sqrt{x} e) $(HF) [x]$ f) $(HF) x^2$
- Igaz-e, hogy ha f folytonos x_0 -ban, akkor $-f$ is folytonos x_0 -ban?
- (HF) Legyen f valós függvény a $[0, 10]$ intervallumon. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?
(i) f konvex az $[3, 8]$ intervallumon.
(ii) f konvex az $[5, 7]$ intervallumon.
- (HF) Tudjuk, hogy f konvex az I intervallumon. Mit állíthatunk $-f$ -ről?
- (HF) Minden pozitív egész k -ra határozzuk meg, hogy az x^k függvény mely intervallumokon konvex és mely intervallumokon konkáv!
- (HF) a) Adjuk meg az összes olyan függvényt, amely konvex és konkáv a $[1, 2]$ intervallumon!
b) Adjuk meg az összes olyan függvényt, amely szigorúan konvex és szigorúan konkáv a $[1, 2]$ intervallumon!
- (HF) Változik-e a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ határérték, ha f -et 3-ban megváltoztatjuk?
- (HF) Írjuk fel logikai jelekkel az alábbi állításokat!
a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 3$ b) $\lim_{x \rightarrow 7+} f(x) \neq -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq -9$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \infty$
- (HF) Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 7} x^2$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \operatorname{sgn}(x)$
f) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} [x]$ g) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \{x\}$ h) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ i) $\lim_{x \rightarrow 2} \{x\}$
- (HF) Mit mondhatunk $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ -ről, ha tudjuk hogy $\lim_{x \rightarrow 6} g(x) = 10$ és $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) + g(x) = 3$?
- (HF) Igaz-e, hogy ha f folytonos 0-ban, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 0$?
- (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \dots \in [0, \infty)$ és $a_n \rightarrow a$, akkor $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$!
- (HF) Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!
a) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$
- (HF) Mit állíthatunk $f + g$ folytonosságáról a -ban (Biztos hogy folytonos? Biztos hogy nem folytonos?), ha
a) f és g folytonos a -ban? b) f folytonos a -ban, de g nem folytonos a -ban?
c) sem f , sem g nem folytonos a -ban?
- (HF) Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 1}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x]$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{x\}$
- (HF) Határozzuk meg, hogy hol van definiálva az $f(x) = \frac{5x-7}{2x+10}$ függvény, hol folytonos, továbbá határozzuk meg minden pontban a határértékét, az összes egyoldali határértékét, valamint a ∞ -ben és a $-\infty$ -ben vett határértékét!

Gyakorló feladatok:

20. Legyen a_n egy sorozat, b egy valós szám. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?
- (i) $|a_n - b|$ szigorúan monoton csökken.
(ii) $a_n \rightarrow b$.
21. Mely intervallumokon monoton a Dirichlet függvény?
22. a) Az f és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények egy pontban eltérnek, mindenhol máshol megegyeznek. Lehetnek-e mindketten mindenhol folytonosak?
b) Tegyük fel, hogy az f és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek minden pontban van véges határértékük és meg is egyeznek. Következik-e ebből, hogy $f = g$ mindenhol?
23. Legyen f valós függvény. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?
- (i) f folytonos a -ban.
(ii) $|f|$ folytonos a -ban.
24. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\{x\}}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x\}}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$$

25. * Mely pontokban folytonosak az alábbi függvények?

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$c) R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, (p, q) = 1 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Riemann-függvény}$$