19. feladatsor

1. a) Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra!

   b) Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az "(a_n) divergens" állítással?

2. Az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekről döntsük el, hogy párosak illetve páratlanok-e, periodikusak-e, $\mathbb{R}$-en monoton nőnek illetve csökkennek-e, szigorúran monoton nőnek illetve csökkennek-e, korlátosak-e!

   a) x^3 *b)* $[x]$ (x egész része) *c)* $\{x\}$ (x tört része)

3. Határozzuk meg az alábbi f és g függvények $f \circ g$ kompozícióját, továbbá adjuk meg a kompozíció értelmezési tartományát, értékkészletét és grafikonját!

   a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2$

   (HF) c) $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = x + 2$ *(d)* $f(x) = \dfrac{1}{x-2},\ g(x) = 2^x - 2$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét, ha van! (Az n. tagban n darab gyökjel és n darab 20 van.)

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}$$

5. Mit mondhatunk az $f \cdot g$ és $f + g$ függvények párosságáról illetve páratlanságáról (azaz igaz-e, hogy mindig páros vagy hogy mindig páratlan), ha

   a) f és g páros? b) f és g páratlan? (HF) c) f páros, g páratlan?

6. Döntsük el, hogy az $f : A \to B$ függvény injektív, szürjektív illetve bijekció-e A és B között, van-e inverz függvény, továbbá adjuk is meg, ha van!

   a) $f = 2x,\ A = B = \mathbb{R}$ b) $f = x^2,\ A = B = \mathbb{R}$

   (HF) (c) $f = x^2,\ A = B = [0, \infty)$ d) $f = \frac{1}{x+1},\ A = [9, 99], B = f(A)$

7. (HF) Függvénygrafikonok-e a következő görbék, azaz melyikhez van és melyikhez nincs olyan valós függvény, amelynek épp ez a grafikonja?

   a) kör b) álló parabola c) fekvő parabola d) felső félkör

8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény p szerint periodikus, akkor p minden pozitív egész többszöröse szerint is periodikus!

9. (HF) Periodikus-e az alábbi függvény (melyet Dirichlet függvénynek neveznek)? Ha igen, akkor adjuk meg az összes olyan számot, amely szerint periodikus!

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

10. (HF) Van-e olyan függvény, amely $\mathbb{R}$-en monoton nő és monoton csökken? Ha van, akkor adjuk meg az összes ilyen függvényt!

11. (HF) Egy (a_n) sorozatról tudjuk, hogy $|a_n - a_m| < \frac{1}{n+m}$ minden n, m-re. Következik-e ebből, hogy a sorozat konvergens?

12. (HF) Legyenek (a_n) és (b_n) végtelenhez tartó sorozatok. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

   (i) $a_n \sim b_n$ *(ii)* $a_n - b_n \to 0$

Gyakorló feladatok:

13. Határozzuk meg azt a legbővebb halmazt, amely a megadott függvény értelmezési tartománya lehet! Határozzuk meg a függvény értékészletét! Adjuk meg az inverzét, ha van! Ha nincs inverze $\mathbb{R}$-en, van-e inverze $\mathbb{R}$ valamilyen részintervallumán? Ha igen, adjuk meg!

   a) $f(x) = \sqrt{x-1}$; b) $g(x) = x^2$; c) $h(x) = 2x - x^2$; d) $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

14. (HF) Határozzuk meg a határértékét, ha van!

   a) $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{3n}$ *b)* $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *c)* $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$