

18. feladatsor

1. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, ha van!

$$a) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots \quad b) 9, 8, \dots, 1, 99, 98, \dots, 10, 999, 998, \dots, 100, \dots$$

2. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

(i) Az (a_n) sorozat szigorúan monoton nő.

(ii) Az (a_n) sorozat tart a végtelenhez.

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, ha van!

$$a) \sqrt[2n]{2n} \quad b) \sqrt[7n+5]{13} \quad c) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ -re!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a_n felülről nem korlátos, akkor van végtelenhez tartó monoton részsorozata!

6. (HF) Van-e oszcillálva divergens monoton sorozat?

7. (HF) Legyen (a_n) egy sorozat, (a_{n_k}) pedig az (a_n) sorozat egy részsorozata. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

$$a) (i) a_n \rightarrow 7 \quad (ii) a_{n_k} \rightarrow 7$$

$$b) (i) a_n \rightarrow \infty \quad (ii) a_{n_k} \rightarrow \infty$$

8. (HF) Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy van-e konvergens részsorozatuk!

$$a) (-1)^n \quad b) \frac{1}{n} \quad c) \sqrt{n} \quad d) \sin(n)$$

9. (HF)

$$\inf\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}\} = ?$$

10. (HF) Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad b) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad c) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

Gyakorló feladatok:

11. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

(i) Az (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata.

(ii) $|a_n| \rightarrow \infty$

12. * Bizonyítsuk be, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő!

13. *

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = ?$$