

17. feladatsor

1. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{7n - 2n^3}{3n^3 + 18n^2 - 9} \quad b) \frac{n^{100}}{100^n} \quad c) \frac{10^n}{n!} \quad d) \frac{(-10)^n}{n!} \quad e) 0,99^n n^2$$

2. Bizonyítsuk be, hogy $n! \prec n^n$ igaz!

3. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!} \quad b) \sqrt[n]{2^n + n^2} \quad c) \sqrt[n]{2^n - n^2}$$

4. a) Igaz-e minden $(a_n), (b_n)$ sorozatpárra (amelyre minden n -re $a_n \neq 0, b_n \neq 0$), hogy $a_n/b_n \rightarrow 0 \iff b_n/a_n \rightarrow \infty$?

b) Igaz-e minden végtelenhez tartó $(a_n), (b_n)$ sorozatpárra (amelyre minden n -re $a_n \neq 0, b_n \neq 0$), hogy $a_n/b_n \rightarrow 0 \iff b_n/a_n \rightarrow \infty$?

5. (HF) a) Igaz-e, hogy két divergens sorozat összege mindig divergens?

b) Igaz-e, hogy két divergens sorozat szorzata mindig divergens?

6. (HF) a) Tegyük az alábbi sorozatokat nagyságrend szerint sorba!

$$(n^7), \quad (n^2 + 2^n), \quad (100\sqrt{n}), \quad \left(\frac{n!}{10}\right)$$

b) Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párt!

$$(n!), \quad (n^n), \quad (n! + n^n), \quad (\sqrt{n}), \quad (\sqrt[n]{n}), \quad (\sqrt{n+1}), \quad (\sqrt[n]{2})$$

7. (HF) Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{2n^2 - 5n^5}{3n^3 - 4n^4} \quad b) \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \quad c) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad d) \sqrt{n^2 + n} - n$$

8. (HF) Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow -\infty$ és

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 0$!

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 7$!

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty$!

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = -\infty$!

Gyakorló feladatok:

9. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

a) (i) $a_n \rightarrow 0$ (ii) $|a_n| \rightarrow 0$

b) (i) $a_n \rightarrow 3$ (ii) $|a_n| \rightarrow 3$

10. Egészítsük ki a határérték összegéről szóló táblázatot az oszcillálva divergens sorozatokkal!

11. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{2 + n\sqrt{n} - 3^{-n}}{n^2 + 2^n} \quad b) \sqrt[n]{n+1} \quad c) n - 2^n \quad d)* \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

12. * Van-e minden $(a_n) \prec (c_n)$ sorozatpárhoz olyan (b_n) sorozat, amelyre $(a_n) \prec (b_n) \prec (c_n)$?