

16. feladatsor

1. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor

a) $a_n + b_n$ konvergens?

b) $a_n + b_n$ divergens?

2. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{1 + \frac{1}{n}}{2^{-n} + 2}$$

$$b) \left(\sqrt{n} + \frac{4}{n^2} \right) \cdot (-n)$$

$$c) \frac{2^n + \sqrt{n}}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{n}}$$

$$d) \frac{(0,1)^n}{\sqrt{n}}$$

3. Vannak-e olyan konvergens (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre

a) $a_n \leq b_n$ minden elég nagy n -re, de $\lim a_n > \lim b_n$?

b) $a_n < b_n$ minden elég nagy n -re, de $\lim a_n \geq \lim b_n$?

c) $\lim a_n < \lim b_n$, de nem igaz, hogy $a_n < b_n$ minden elég nagy n -re?

d) $\lim a_n \leq \lim b_n$, de nem igaz, hogy $a_n \leq b_n$ minden elég nagy n -re?

4. Igaz-e, hogy ha minden n -re $a_n > 1$, akkor $a_n^n \rightarrow \infty$?

5. (HF) Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \left(\frac{2}{3} \right)^{1/n} + (-0,99)^n$$

$$b) \frac{1}{n^2 + n}$$

$$c) \sqrt[3]{n + 100}$$

$$d) \sqrt[n]{n^2}$$

$$e) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$f) \left(2 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$g) \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$h) \sqrt[3]{n-100}$$

6. (HF) Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ és

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$!

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 7$!

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$!

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$!

Gyakorló feladatok:

7. Egy sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Lehet-e konvergens?

8. Miért rosszak az alábbi definíciók? (Azaz adjunk olyan példát, amikor a rossz definíció teljesül, de az igazi nem, vagy fordítva!)

a) H felülről korlátos : $(\forall x \in H) (\exists K) a_n \leq K$

b) $a_n \rightarrow b$: $(\forall \varepsilon) (\exists n_0) (\forall n > n_0) |a_n - b| < \varepsilon$

9. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \frac{2+n}{n^2}$$

$$b) \frac{n + \sin(n)}{n}$$

$$c) \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{n}$$

$$d) \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$$

$$e) n - 2^n$$