# 13. feladatsor

1. Írjuk fel logikai jelekkel, de a határték jelölései és tagadásjel (valamint $\nexists$ és $\not\forall$ jelek) nélkül az alábbi állításokat!

   a) Az $(a_n)$ sorozat tart 3-hoz.

   b) A $(b_n)$ sorozat nem tart $-\sqrt{2}$-höz.

   c) A $(c_n)$ sorozat konvergens.

   d) A $(d_n)$ sorozat divergens.

2. Konvergens-e? Divergens-e?

   $$a)\ \frac{1}{n^2} \qquad b)\ \frac{2n+1}{n} \qquad c)\ n^3 \qquad d)\ d_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ prímszám} \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímszám} \end{cases}$$

   $$(HF) \quad e)\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad f)\ \frac{n^2-1}{n^2+1} \qquad g)\ 2^{-n} \qquad h)\ \sqrt{n}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{1}{n}$ sorozat nem tart 7-hez!

4. (HF) Igaz-e, hogy pontosan akkor határérétéke $b$ az $(a_n)$ sorozatnak, ha

   a) bármely $\varepsilon > 0$-ra az $a_n$ sorozatnak végtelen sok tagja van $\varepsilon$-nál közelebb $b$-hez?

   b) bármely $\varepsilon > 0$-ra az $a_n$ sorozatnak csak véges sok tagja van $b$-től legalább $\varepsilon$ távolságban?

   c) van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az $a_n$ sorozatnak végtelen sok tagja van $\varepsilon$-nál közelebb $b$-hez?

   d) van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az $a_n$ sorozatnak végtelen sok tagja van $b$-től legalább $\varepsilon$ távolságban?

5. (HF) Van-e olyan $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre

   a) $\sup A > \inf A$ ?

   b) $\sup A < \inf A$ ?

   c) $\sup A = \inf A$ ?

6. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra

   $$\Big((\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ x \leq y\Big) \Longrightarrow \sup A \leq \sup B\ !$$

7. (HF) Az előadáson beláttuk, hogy minden felülről korlátos nemüres halmaznak van legkisebb felső korlátja. Vezessük le ebből a tételből azt a másik tételt, mely szerint minden alulról korlátos nemüres halmaznak van legnagyobb alsó korlátja! (Ötlet: Vegyük a $-A$ halmazt.)

8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy

   $$a > b > 0, r > 0, r \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^r > b^r\ !$$

9. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a > 0$ valós és $x, y$ racionális számokra $(a^x)^y = (a^y)^x$ !

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.