

12. feladatsor

1. Határozzuk meg a 11. feladatsor 2. feladatában szereplő halmazok alsó és felső határait!
2. A H halmaz szuprémuma 12. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -hez van olyan $h \in H$, amelyre $12 - \frac{1}{n} < h \leq 12$ teljesül!
3. Bizonyítsuk be, hogy

$$a > b > 0, r > 0, r \in \mathbb{Q} \implies a^r > b^r !$$
4. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$. Mit mondhatunk $\sup A$ és $\sup B$ nagyságviszonyáról (vagyis milyen egyenlőtlenség igaz biztosan) és mit $\inf A$ és $\inf B$ nagyságviszonyáról?
5. Milyen halmazt alkothat egy halmaz felső korlátjainak halmaza? (Vagyis adjuk meg az összes olyan halmazt, amely valamely halmaz felső korlátainak halmaza!)
6. (HF) Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!
 - a) $[1, 2]$
 - b) $(1, 2)$
 - c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$
 - d) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\}$
 - e) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^+\}$
 - f) $\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\}$
 - g) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$
 - h) \mathbb{Q}
 - i) $\{x : x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$
 - j) $\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$
7. (HF) Lehet-e a H halmaz szuprémuma c , ha
 - a) $k < c$ és k felső korlátja H -nak?
 - b) $k > c$ és k alsó korlátja H -nak?
 - c) $\exists h \in H \quad h > c$?
 - d) c maximuma H -nak?
 - e) c minimuma H -nak?
8. (HF) Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből melyik következik?
 - (i) H alulról nem korlátos.
 - (ii) H -nak nincs legkisebb eleme.
 - (iii) $(\forall x \in H) (\exists y \in H) y < x$.
9. (HF) Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmaz esetén jelöljük $-A$ -val a $\{-x : x \in A\}$ halmazt. Fejezzük ki $\inf(-A)$ -t és $\sup(-A)$ -t $\inf A$ és $\sup A$ segítségével!
10. (HF) Bizonyítsuk be a hatványozás azonosságait pozitív alap(ok) és egész kitevő(k) esetén!