10. feladatsor

1. Igaz-e?

   a) Egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat metszete soha nem üres.

   b) Egymásba skatulyázott nyílt intervallumsorozat metszete soha nem üres.

   c) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.

   d) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.

   e) Egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.

   f) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.

   g) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.

   h) Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$!

3. A valós számok axiómái közül melyek teljesülnek és melyek nem a racionális számok halmazára (a szokásos műveletekkel és rendezéssel)?

4. Bizonyítsuk be az Arkhimédeszi axiómából, hogy $(\forall b, c < 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ nb < c$!

5. * Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van irracionális szám!

6. (HF) a) Lehet-e egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres?

   b) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete üres?

   c) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

   d) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

   e) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

   f) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete intervallum?

   g) Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete intervallum?

7. (HF) Mire következtethetünk abból az A és B halmazokra, ha azt tudjuk, hogy

   a) bármelyik elem benne van A-ban, ha B-ben benne van?

   b) bármelyik elem csak akkor lehet benne A-ban, ha B-ben benne van?

   c) $A \cup B = A \cap B$?

8. (HF) Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével (azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$) az alábbi halmazokat!

   a) azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben és C-ben nincsenek benne

   b) azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne

   c) azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne

   d) azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan háromban vannak benne

9. (HF) Határozzuk meg az alábbi halmazsorozatok metszetét! $(n = 1, 2, \ldots)$

   a) $A_n = \{a \in \mathbb{Q} : -\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}\}$ b) $B_n = \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : -\frac{1}{n} < b < \frac{1}{n}\}$

   c) $C_n = \{c \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} - \frac{1}{n} < c < \sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$

   d) $D_n = \{d \in \mathbb{N} : -n < d < n\}$ e) $E_n = \{e \in \mathbb{R} : -n < e < n\}$

10. (HF) Levonható-e valami következtetés abból, ha mindkét alábbi állítás igaz?
    1. “Ha két háromszög, D_1 és D_2 egybevágó, akkor D_1 és D_2 egyenlő területű.”
    2. “D_1 és D_2 háromszögek egyenlő területűek.”