2013 március 11. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

9. feladatsor

1. Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

   a) negatív irracionális számok halmaza b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

   (HF) c) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ d) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\}$

2. Legyen H egy nemüres számhalmaz. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

   (i) H felülről korlátos (ii) $(\forall h \in H) \quad (\exists K \in \mathbb{R}) \quad h < K$

3. Tegyük fel, hogy A nemüres, felülről korlátos halmaz, és $\sup A = b$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in A$, amelyre $x > b - \varepsilon$!

4. Tegyük fel, hogy A és B olyan nemüres számhalmazok, melyekre teljesül, hogy $(\forall x \in A)$ $(\forall y \in B)$ $x < y$. Következik-e ebből, hogy

   a) $\sup A \le \inf B$? b) $\sup A < \inf B$?

5. Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ számsorozat, amelyre az $\{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz korlátos, de nincs se maximuma, se minimuma?

6. (HF) Van-e olyan $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre

   a) $\sup A > \inf A$? b) $\sup A < \inf A$? c) $\sup A = \inf A$?

7. (HF) Legyen H egy nemüres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?

   a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x < y$ b) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad x < y$

8. (HF+) Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

   a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 100$? b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n$?

   c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{2} + 2$? d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 10\sqrt[3]{n}$?

9. (HF+) Bizonyítsuk be az alábbiakat tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ halmazokra!

   $$a)\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad b)\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

10. (HF+) Bizonyítsuk be, hogy ha három nemnegatív szám szorzata 1, akkor összegük legalább 3 !

11. (HF+) Bizonyítsuk be a hatványozás azonosságait pozitív alap(ok) és egész kitevő(k) esetén!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.